TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM G. BORELIUS S. BÅGMAN

J. S. HEDSTRÖM G. STARCK A. WAHLGREN

ADERTONDE ÅRGÅNGEN

1935

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

Tidskr. utkommer med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 50, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 52755.

Redaktion och expedition: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1 9 3 5

Adertonde årgångens innehåll.

Sid.

ALFVÉN, H. Anm. av C. G. Darwin, De nya materiebegreppen.. 51
AURÉN, T. E. Anm. av I. Malmer, Elementär aerodynamik 254
— — Anm. av K. Wegener, Die Physik der Erde 255
BECKMAN, ANNA. Anm. av J. W. N. Sullivan, Naturforskningens gränser 52
BECKMAN, N. Isländsk och medeltida skandinavisk tideräkning .. 129
BENNER, S. Om bestrålningsrisker vid röntgendemonstrationer .. 14
BERG, E. Ett geometriskt sannolikhetsproblem med praktisk tillämpning 1
BERGHOLM, C. Strålbegränsning i kikare 226
BORELIUS, G. De tekniska enheterna för kraft och massa..... 34
BÅGMAN, S. Lösning av en amorteringsuppgift 244
CARLSON, F. Om ett bevis för en stereometrisk sats 234
ENGLUND, B. Studium av syrors och basers dissociation med användning av färgindikatorer..... 159
ENSKOG, D. Anm. av Berättelse över 8:e skandinaviska matematikerkongressen i Stockholm 1934..... 199
FORSSTRÖM, G. Ett par enkla ljusabsorptionsförsök med en röntgenskärm 36, 280
— — En not till Moll-Rudbergs elektricitetslära 245
FREDGA, A. Studien über Selen-di-karbonsäuren und Diselen-dikarbonsäuren (ref. av gradualavh.)..... 203
FRENDEL, A. Anm. av T. Wetterblad, Fysikaliska laborationsuppgifter för realskolan..... 66
GRENANDER, S. Anm. av C. G. A. Arvidson och C. O. Hiljding, Logaritmiska navigeringstabeller, Del I 135
JENVALL, A. Anm. av Nyström-Olson, Kortfattad funktionslära för realgymnasiet..... 66
JUNELL, R. Anm. av L. Smith, Handledning i organisk syntes och reaktionslära..... 132
KLEIN, O. Det Einsteinska additionsteoremet för parallella hastigheter 9
— — Anm. av E. Zimmer, Umsturz im Weltbild der Physik .. 50
KNAVE, E. Anm. av Tauchmann-Gunneson-Cedergren, Lärobok i elektroteknik..... 201
LEIDE, E. En metod att demonstrera stående longitudinell vågrörelse 31

LIEN, M. Anm. av Elfman-Lindqvist-Carlson-Stage, Mekanisk teknologi för tekniska läroverk 200
LUNDBLAD, R. Anm. av B. Bjerke og K. Glimme, Fysikk for realgymnasiet 258
— — Anm. av S. Bruun og O. Devik, Fysikk for realgymnasiet: Varme 259
— — Ett tillägg till uppsats av Hj. Mandal 184
LUNDQUIST, O. Om inducerad radioaktivitet 95, 280
LÖNNQVIST, C. Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning 42
MALMBORG, I. Verifikation av Biot-Savarts lag 38
MANDAL, Hj. Bestämning av vattnets ångtryck 182
NILSSON, H. Isens spec. vikt, en laborationsuppgift 94
NORDEFELDT, E. Några engelskspråkiga tidskrifter 263
NYBERG, H. D. Demonstration av kraftparallellogrammen 249
PETRINI, H. Den Bertrandska paradoxen 153
PETTERSSON, B. Anm. av H. G. Lehmann, Shop Projects in Electricity 257
Red. Anm. av Science Progress och Nature 202
— — En gåva 268
RENDAHL, C. En enkel trefasgenerator och några försök med växelström 187
RYDBERG, R. Über Neubildung und Zerfall zweiatomiger Moleküle, von spektroskopischem Standpunkte aus (ref. av gradualavh.) 137
RYDE, N. Zur Kenntnis des Einflusses elektrischer Felder auf die Lichtemission der Edelgasatome (ref. av gradualavh.) 69
SANDSTRÖM, A. An Investigation into X-Ray Absorption Spectra (ref. av gradualavh.) 204
SCHJÅNBERG, E. Die Verbrennungswärmen einiger chlorsubstituierter Fettsäuren und Ester (ref. av gradualavh.) 67
SEDSTRÖM, E. Anm. av A. Thorup, Praktisk Fysik med Fysiksløjd for Folkeskolen 64
SJÖGREN, K. Experimentelle Untersuchungen des Starkeffekts bei Wasserstoff und Helium (ref. av gradualavh.) 70
SJÖSTEDT, C. E. Rymdgeometriens plats inom realgymnasiets kursplan 184
SJÖSTRÖM, M. Anm. av Kosmos, Bd. 12 53
STARCK, G. Demonstration av jämviktsförskjutning i ett homogent system 119
— — Nobelprisen i fysik och kemi 1935 217
— — Anm. av R. A. Millikan, Electrons, Protons, Photons, etc. 132
— — Lösningars kokpunktsförhöjning 250

STARCK, G. Anm. av H. T. Briscoe, The Structure and Properties of Matter 255
— — Anm. av A. Farkas, Orthohydrogen, Parahydrogen and Heavy Hydrogen 256
— — Anm. av »Actualites scientifiques et industrielles» 259
SVENSSON, B. Naturvetenskapliga dagar i Lund 3—4 mars 1935 .. 47
SÖDERMAN, M. Beitrag zur Festlegung der Skala der Röntgenwellenlängen in absolutem Mass (ref. av gradualavh.) 136
TANDBERG, J. Vad är ett kilogram? Ett tillägg 33, 280
— — Anm. av K. Lundmark, Från kaos till kosmos 57
— — Vinkelns tredelning I 85
— — Anm. av P. Heegaard, Um trideling av vinkelen 253
TEGNÉR, H. En generalisering av den Euler'ska pentagonaltalsatsen 221
UHLER, A. Anm. av C. F. Lundahl, Ekvationsteori 197
— — Några förslag till enskilt arbete i matematik å gymnasiet .. 237
WAHLSTRÖM, B. En optisk universalapparat 24
WALLENQUIST, Å. Några nyare undersökningar över absorptionslinjerna inom stjärnspektra 110
WETTERBLAD, T. Anm. av Moll-Rudberg, Lärobok i fysik. I. Statik 10:e uppl. och V. Dynamik 9:e uppl. 59, 62
WIGERT, S. Ett aritmetiskt problem och dess lösning 81
WIGREN, N. Zur Kenntnis der organischen Arsenverbindungen (ref. av gradualavh.) 266
ÅKERBERG, B. Isoperimetriska produkters maxima 233
ÅSTRAND, S. Rostads standardprov i räkning 247
ÖDBERG, G. Ringankare och trumankare 19
— — Anm. av H. Åkerblom, Elektricitetslärans och elektromaskinlärans grunder 134
ÖLANDER, A. Anm. av C. Du Rietz, Kort handbok i pH-bestämning och titrering jämte de lösningsteoretiska grunderna .. 57
ÖVERGAARD, TH. Anm. av S. Nydell, Elektroteknik för sjökaptensklasser och handledning i radiopejling 260
Tabell (efter O. HAHN) över de kemiska grundämnena och de naturliga atomslagen enligt isotopforskningens nuvarande ståndpunkt 123
Atomvikter 1935 196

Föredrag under hösten 1934 och våren 1935 inom Svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 73, 139
Föreläsningar för lärarekand. vid provårsläroverken 1934—1935 .. 207
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna v. t. och h. t. 1935 samt vid fyllnadsprövningen i aug. 1935 ..... 144, 212, 274

Provräkning i realexamen v. t. och h. t. 1935 ..... 148, 278
Praktisk realexamen: Uppgifter i fysik v. t. och h. t. 1935 .. 149, 279
» » : Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära v. t. 1935 150
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 76, 141, 209, 270
Gradualavhandlingar (autoreferat): A. Fredga (203), R. Rydberg (137), N. Ryde (69), A. Sandström (204), E. Schjånberg (67), K. Sjögren (70), M. Söderman (136), N. Wigren (266).
Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Era, Industritidningen Norden, Tidskrift för ljuskultur, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Höiere Skole (Oslo) 72, 207
Bokanmälningar: Zimmer, Umsturz im Weltbild der Physik; Darwin, De nya materiebegreppen; Sullivan, Naturforskningens gränser; Kosmos, Bd. 12; Lundmark, Från kaos till kosmos; Du Rietz, Kort handledning i pH-bestämning och titrering; Moll-Rudberg, I. Statik o. V. Dynamik; Thorup, Fysik med Fysiksløjd for Folkeskolen; Wetterblad, Fysikaliska laborationsuppgifter för realskolan; Nyström-Olson, Kortfattad funktionslära och analytisk geometri 50
Millikan, Electrons, Protons, Photons, Neutrons and Cosmic Rays; Smith, Handledning i organisk syntes och reaktionslära; Åkerblom, Elektricitetslärans och elektromaskinlärans grunder; Arvidson o. Hiljding, Logar. navigeringstabeller .. 132
Lundahl, Ekvationsteori; Åttonde Skandinaviska matematikerkongressen i Stockholm 1934; Elfman-Lindqvist-Carlson-Stage, Mekanisk teknologi för tekniska läroverk; Tauchmann-Gunneson-Cedergren, Lärobok i elektroteknik; Science Progress; Nature, »Royal Jubilee Number» 197
Heegaard, Um trideling av vinkelen; Malmer, Elementär aerodynamik; Wegener, Die Physik der Erde; Briscoe, The Structure and Properties of Matter; Farkas, Orthohydrogen, Parahydrogen and Heavy Hydrogen; Lehmann, Shop Projects in Electricity; Bjerke-Glimme, Fysikk for realgymnasiet; Bruun-Devik, Fysikk for realgymnasiet (Varme); Actualites scientifiques et industrielles; Nydell, Elektroteknik och handledning i radiopejling; Några engelskspråkiga tidskrifter: Journal of Chemical Education, Science, School Science and Mathematics, The Science Leaflet, Journal of Higher Education 253

Ett geometriskt sannolikhetsproblem med praktisk tillämpning.

Av ERIK BERG.

För en tid sedan förelades mig av bergsingenjör G. KIHLSTEDT ett intressant sannolikhetsproblem, som han kommit i kontakt med under en undersökning av förhållandena vid vissa malmers renkrossning. De ansatser till lösning av uppgiften, som jag på hans anmodan gjorde, gåvo resultat, vilka i stort sett överensstämde med dem, som han på experimentell väg erhöll. I samband med de uppsatser, rörande sannolikhetskalkylens teori, som förekommit i några av denna tidskrifts senare årgångar, kan kanske ett problem, sådant som det här behandlade, påräkna ett visst intresse.

Bergsingenjör KIHLSTEDT framställde saken på följande sätt. För att undersöka, hur renkrossning av ett visst slags järnmalm utföll vid olika förbehandling av malmen, krossades efter förbehandlingen ett stycke av malmen i en mortel, varefter malmkornen sållades och insmältes i ett lämpligt preparatmaterial. Det erhållna preparatet slipades så, att en plan yta erhölls. Då en sådan planslipad yta studeras i ett svagt förstorande mikroskop, framträder tydligt skillnaden mellan den rena järnmalmen och »gråberget». Vissa av malmkornen te sig nu som rena järnmalmskorn, andra som bestående av både järnmalm och gråberg och andra åter som rena gråbergskorn. Det som har största intresset, är att bestämma antalet rena järnmalskorn i procent av hela antalet malmkorn. Nu förhåller det sig givetvis så, att en del av de korn, vilka förefalla att vara rena järnmalmskorn,

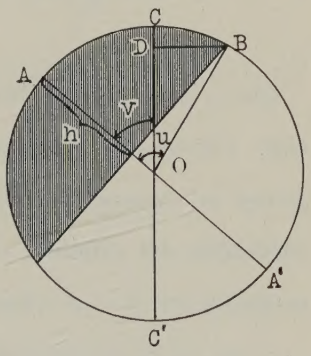
i själva verket även innehålla gråberg, men vid tillverkningen av preparatet råkat bli skurna på ett sådant sätt, att den synliga ytan består av ren järnmalm. Ett rent järnmalmskorn kommer tydligen alltid att framträda såsom sådant i preparatet, men av blandkornen komma vissa att te sig som rena järnmalmskorn och vissa som rena gråbergskorn. Om man beräknar procenthalten rena järnmalmskorn, »renkrossningstalet», med användande av de tal, som erhållas vid räkning av malmkornen, så som de te sig i preparatet, erhåller man tydligen ett för högt värde. Om man gör en serie undersökningar och därvid beräknar renkrossningstalen på detta sätt, komma alla resultaten att behäftas av ett fel, men detta verkar alltid i samma riktning, och en jämförelse mellan de olika resultaten i undersökningsserien kan därför i allmänhet mycket väl göras. Men det har givetvis sitt intresse att finna en metod att beräkna det verkliga renkrossningstalet.

Malmkornen i preparatet ha naturligtvis ingen bestämd form, men då de ha ett relativt avrundat utseende, ligger det nära till hands att vid beräkningarna anta, att kornen ha sfärisk form. Vidare antages, att skiljeytan mellan järnmalm och gråberg är plan. Malmkornet skulle alltså bestå av en sfär med ett sfäriskt segment av ren järnmalm och resten gråberg. Storleken av sfärens radie inverkar ej på resultatet av följande beräkningar och antages för enkelhets skull $= 1$. Järnmalmssegmentets storlek tänkes bestämt genom angivande av halva den medelpunktsvinkel, som segmentet upptager (vinkeln AOB i figuren).

I figuren är AA' en diameter, vinkelrät mot skiljeytan mellan järnmalm och gråberg. Då malmkornet är insmält i preparatet, bildar denna diameter en viss vinkel AOC med en axel, vinkelrät mot den yta, som planslipas. Vi beräkna först sannolikheten för att vinkeln AOC skall ha ett värde mellan v och $v + dv$. Härvid möter oss genast svårigheter av den art, som behandlats av lektor H. Petrini i en uppsats angående geometrisk sannolikhet i denna tidskrift (årg.

17, 1934, sid. 40 ff.). Svårigheten i uppskattandet av vilka element, som vid en sannolikhetsberäkning skola anses likvärda, kan man vid ett konstruerat problem undgå genom en noggrann formulering, men denna möjlighet finnes ej vid ett problem av det här behandlade slaget, varför man knappast kan undgå ett visst osäkerhetsmoment. I här ifrågakommande fall förefaller det mig naturligast att resonera på följande sätt. För att vinkeln AOC skall ligga mellan v och $v + dv$ fordras, att C ligger på en sfärisk zon, vars yta $= 2\pi[\cos v - \cos(v + dv)] = 2\pi \sin v \, . \, dv$. Sannolikheten härför $= \frac{\text{zonens yta}}{\text{sfärens yta}} = \frac{2\pi \sin v \, . \, dv}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin v \, . \, dv$.

Efter att ha förutskickat denna anmärkning övergå vi till att beräkna sannolikheten för att ett malmkorn ger upphov till en snittyta av ren järnmalm, om vinkeln AOB har ett visst värde u. Då räkningarna ställa sig något olika, behandla vi var för sig de båda fallen $u \leqq \frac{\pi}{2}$ och $u > \frac{\pi}{2}$.



Figuren motsvarar fallet $u < \frac{\pi}{2}$. För att en snittyta av ren järnmalm skall kunna uppkomma, fordras, att vinkeln $AOC = v < u$ eller $> \pi - u$. Antag först att $v < u$. Snittet genom kornet kan skära diametern CC' i vilken punkt som helst. Eftersom ett rent malmsnitt uppkommer endast om snittet skär den del av diametern, som på figuren utmärkes av sträckan CD, så sätta vi den sökta sannolikheten

$$s = \frac{CD}{CC'} = \frac{1 - \cos(u - v)}{2}.$$

På grund av symmetriskäl erhålles samma sannolikhetstal då vinkeln $AOC = \alpha$ och då $AOC = \pi - \alpha$. Med hänsyn

härtill och till den ovan utförda beräkningen av sannolikheten för att vinkeln AOC ligger mellan v och $v + dv$, erhålles följande resultat:

Sannolikheten för att en snittyta genom ett malmkorn, med en vinkel $u \leqq \frac{\pi}{2}$, skall utgöras av ren järnmalm, är

$$F(u) = 2 \int_0^u \frac{1 - \cos(u - v)}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin v \, . \, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^u [1 - \cos(u - v)] \sin v \, . \, dv \, .$$

Om $u > \frac{\pi}{2}$ kan ej beräkningen utföras på fullt samma sätt. Liksom i föregående fall behöver man emellertid på grund av symmetriskäl blott räkna med vinklar $v < \frac{\pi}{2}$ och fördubbla det erhållna resultatet. För värden på vinkeln v mellan 0 och $\pi - u$ erhålles liksom ovan $s = \frac{1 - \cos(u - v)}{2}$, men för värden på v mellan $\pi - u$ och $\frac{\pi}{2}$ finner man i stället uttrycket $s' = \frac{2 - \cos(u - v) - \cos(u + v - \pi)}{2}$, därför att då även snitt genom den nedre delen av sfären kunna ge upphov till rena malmsnitt.

För $F(u)$ erhålles följande uttryck:

$$F(u) = 2 \int_0^{\pi - u} \frac{1 - \cos(u - v)}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin v \, . \, dv +$$

$$+ 2 \int_{\pi - u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - \cos(u - v) - \cos(u + v - \pi)}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin v \, . \, dv \, .$$

Efter uppdelning av den sista integralen kan uttrycket skrivas på följande sätt:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi-u}[1 - \cos(u - v)] \sin v \,.\, dv +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\pi-u}^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos(u - v)] \sin v \,.\, dv +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\pi-u}^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos(u + v - \pi)] \sin v \,.\, dv.$$

Genom att i den sista integralen substituera $v' = \pi - v$ erhålles emellertid:

$$\frac{1}{2}\int_{\pi-u}^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos(u + v - \pi)] \sin v \,.\, dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{u}^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos(u - v')] \sin v' \,.\, dv' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u}^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos(u - v)] \sin v \,.\, dv,$$

och uttrycket ovan kan skrivas:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi-u}[1 - \cos(u - v)] \sin v \,.\, dv +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\pi-u}^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos(u - v)] \sin v \,.\, dv +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}[1-\cos(u-v)]\sin v\,.\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{u}[1-\cos(u-v)]\sin v\,.\,dv.$$

För $F(u)$ erhålles följaktligen samma uttryck, vare sig u är $\leqq\frac{\pi}{2}$ eller $>\frac{\pi}{2}$.

Den obestämda integralen $\int[1-\cos(u-v)]\sin v\,.\,dv$ har värdet $\frac{1}{4}[\cos(2v-u)-4\cos v-2v\sin u]$, och man erhåller alltså:

$$F(u)=\frac{1}{4}(2-2\cos u-u\sin u).$$

Om järnmalmssegmentets höjd betecknas med h, så har man följande samband mellan h och u:

$$\cos u=1-h\,;\,u=\arccos(1-h).$$

Betraktas funktionen $F(u)$ som funktion av h kan den skrivas:

$$G(h)=\frac{1}{4}[2-2(1-h)-\arccos(1-h)\sqrt{1-(1-h)^2}]=$$

$$=\frac{1}{4}[2h-\arccos(1-h)\sqrt{2h-h^2}].$$

För att kunna bestämma, hur stor del av totala antalet blandkorn, som vid räkning under mikroskopet komma att te sig som rena järnmalmskorn, måste man känna till, hur blandkornen fördela sig med avseende på segmentets höjd. Kännedomen härom kan tänkas given genom en fördelningsfunktion $V(h)$, varvid $V(h)\,.\,dh$ angiver den del av blandkornen, för vilka malmsegmentets höjd ligger mellan h och

$h + dh$. Att bestämma $V(h)$ med utgångspunkt från den skenbara fördelningen av blandkornen med avseende på järnmalmshalt, som i preparatet iakttages, skulle föra till mycket invecklade kalkyler och ger ingen möjlighet till praktisk tillämpning. Nu ligger emellertid det här behandlade problemet enklare till. Om gråberg och järnmalm ha samma »hållfasthet vid krossning» finnes ingen anledning, varför ett visst värde på h skulle vara vanligare än ett annat. I så fall skulle $V(h)$ vara konstant och alltså $= {}^1/_2$. Och detta tycktes i föreliggande fall approximativt gälla. Snitt, i vilka den större ytan upptogs av gråberg, tycktes nämligen i preparaten vara lika vanliga som de, i vilka den större ytan upptogs av järnmalm.

Under förutsättning att $V(h) = {}^1/_2$ beräknas nu lätt sannolikheten för att ett godtyckligt blandkorn skall ge upphov till en snittyta av ren järnmalm. Införes för denna sannolikhet beteckningen k, har man:

$$k = \int_0^2 G(h) \,.\, V(h) \,.\, dh = \frac{1}{2} \int_0^2 G(h) \,.\, dh =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 [2h - \text{arc cos}\,(1-h)\sqrt{2h - h^2}]dh \,.$$

Genom att integrera detta uttryck erhålles

$$k = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{32} = 0{,}192 \,.$$

Av blandkornen komma alltså c:a 19 % att i preparatet framträda som skenbart rena järnmalmskorn. Enligt de antaganden, som ovan gjorts, kommer en lika stor del av dessa blandkorn att framträda som rena gråbergskorn.

Om man har ett mycket stort antal malmkorn och

antalet rena järnmalmskorn $= a$,
» blandkorn $= b$,
» rena gråbergskorn $= c$,

så kommer den skenbara fördelningen av kornen i preparatet att vara följande:

$$\begin{aligned} \text{Antalet rena järnmalmskorn} &= a + kb = a', \\ \text{» blandkorn} &= b - 2kb = b', \\ \text{» rena gråbergskorn} &= c + kb = c'. \end{aligned}$$

$$\text{Det verkliga renkrossningstalet är} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{a' - \frac{kb'}{1-2k}}{a'+b'+c'},$$

och med det värde på k, som ovan beräknats, erhålles följande formel för beräkning av renkrossningstalet:

$$\text{Renkrossningstalet} = \frac{a' - 0{,}31\, b'}{a'+b'+c'}.$$

Som redan i förbigående omnämnts, gjorde bergsingenjör Kihlstedt en experimentell bestämning av konstanten k. Han beräknade i några fall renkrossningstalet genom att behandla ett stort antal malmkorn med syra, varvid de rena järnmalmskornen upplöstes utan att efterlämna någon rest. Ur antalet malmkorn före och efter syrebehandlingen kunde nu renkrossningstalet beräknas. Med en annan del av samma prov företogs en vanlig preparaträkning. Vid dessa undersökningar fastställdes värden på k, som lågo rätt nära det här beräknade värdet. Som medelvärde av en serie bestämningar erhöll bergsingenjör Kihlstedt $k = 0{,}21$, vilket värde han använde vid korrigeringen av sina preparaträkningar. (Den beräkning av k, för vilken här redogöres, var då ej slutförd).

Med hänsyn till de felkällor, som förekomma vid den experimentella undersökningen, och de antaganden, som man tvingats göra vid den teoretiska beräkningen, måste man beteckna överensstämmelsen mellan de på olika sätt erhållna k-värdena som ovanligt god. Det är svårt att avgöra i vilken mån de antaganden, som gjorts beträffande malmkornens form, förrycka resultatet. Några beräkningar

under antagande av en kubisk form hos malmkornen och en viss speciell fördelning av järnmalm och gråberg inom kornen ha visserligen fört till ungefär samma resultat, men att mera generellt genomföra beräkningarna vållar redan i detta fall stora svårigheter. Vidare är det svårt att avgöra, i vad mån man har rätt att antaga $V(h)$ konstant. En experimentell undersökning i stil med den som ovan beskrivits, tycktes visa, att den del av blandkornen, som gav upphov till rena järnmalmssnitt, skilde sig någon procent från den som gav upphov till rena gråbergssnitt. Detta skulle alltså betyda, att $V(h)$ ej är fullt konstant, men å andra sidan kunna de experimentella undersökningarna ej tillskrivas någon högre grad av noggrannhet.

Det Einsteinska additionsteoremet för parallella hastigheter.

Av **O. KLEIN.**

Man hör och läser ofta missförstådda uttalanden om det Einsteinska teoremet för sammansättning av hastigheter och de formler, som enligt relativitetsteorien sammanbinda uppgifter om lägen och tider givna av olika iakttagare, som röra sig i förhållande till varandra. Kanske kan det följande en smula underlätta förståelsen av dessa frågor.

För att få en tydlig uppfattning av relativitetsteoriens fysikaliska innebörd utgår man lämpligen från den ursprungligen av Lorentz intagna ståndpunkten, att det skall finnas ett privilegierat koordinatsystem, som vi kunna beteckna som absolut vilande, samt att klockor och måttstockar, vilka röra sig relativt till detta, äro felaktiga, i det klockorna gå för sakta i proportion $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$, medan alla kroppar äro förkortade i rörelseriktningen i samma förhållande. Som konsekvens av detta antagande följer sedan,

att en person i rörelse, som tror att han befinner sig i absolut vila och följaktligen betraktar sina mätverktyg som riktiga, menar att en »verkligen» vilande persons klocka går för sakta, och att hans måttstock är förkortad i ovannämnda förhållande. Sålunda finns det intet sätt att avgöra vilken av de båda personerna, som verkligen befinner sig i absolut vila, och man förstår, att Einstein med denna situation som bakgrund krävde en sådan form för naturlagarna, att denna de olika iakttagarnas likvärdighet framträder som tydligt uttalad grundprincip.

I det följande skola vi utgå från en liknande ståndpunkt, blott med den skillnaden, att vi i stället för $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ skola skriva $\beta(v)$, där β är en till att börja med obekant funktion av hastigheten v. Men samtidigt skola vi förutsätta Einsteins grundantagande, att olika iakttagare, som röra sig med konstant hastighet i förhållande till varandra, äro likaberättigade. Vi skola sedan se, att dessa antaganden äro förenliga endast om $\beta(v)$ har den nämnda formen, där c betecknar en konstant parameter.

Vi utgå från ett vilande system A samt ett annat system B, som rör sig med hastigheten v i förhållande till A. För åskådlighetens skull skola vi tänka oss, att A är en banvall och B ett tåg. Vidare skola vi anta, att såväl personerna i A (på banvallen) som personerna i B (i tåget) betrakta sitt eget system som vilande, så att var och en bedömer orter och tider med sin egen klocka och sin egen måttstock. En person C rör sig nu med konstant hastighet genom tåget från dess sista vagn till dess första, och vi skola se, hur de olika iakttagarna bedömer denna C:s vandring.

Från B:s synpunkt må sålunda C ha hastigheten u, medan hans hastighet bedömd från A må vara w. Enligt klockorna i A må vidare hans vandring ha tagit tiden t och enligt klockorna i B tiden t'. Enligt en klocka, som C för med sig skall tiden däremot vara τ. Denna sista klocka går nu för folket i A för långsamt i förhållandet $\beta(w) : 1$ och för

folket i B för långsamt i förhållandet $\beta(u) : 1$. Man har med andra ord

$$\tau = \beta(w)t = \beta(u)t'. \qquad (1)$$

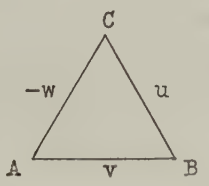
Tågets längd bedömd från B är tydligen ut', samma längd bedömd från A, $(w - v)t$, ty C har under tiden t flyttat sig sträckan wt, medan tågets bakända, där han till att börja med befann sig, har flyttat sig sträckan vt. Enligt vårt antagande mäta iakttagarna i B den längd tåget skulle ha haft, om det befunnit sig i vila, medan iakttagarna i A finna en i förhållandet $\beta(v) : 1$ kortare längd. Man har sålunda

$$(w - v)t = \beta(v)ut'. \qquad (2)$$

Ur (1) och (2) följer nu

$$(w - v)\beta(u) = u\beta(v)\beta(w). \qquad (3\,a)$$

Som man utan vidare ser, gäller hela betraktelsen och därför även formel (3 a) vare sig B och C röra sig åt



samma (som vi ovan förutsatt) eller åt motsatt håll i förhållande till A, om man blott kommer överens om att räkna hastigheterna positiva åt ena hållet och negativa åt motsatt håll. En viktig förutsättning är dock att B och C röra sig utefter samma räta linje. För betraktelsen var det vidare tydligen alldeles likgiltigt, att vi tänkte oss A som en banvall, B som ett tåg och C som en person i tåget. Lika väl kunde vi ha tänkt oss att A var ett tåg, C en banvall och B en person i tåget etc. De tre systemen A, B och C spela med andra ord enligt de förutsättningar vi utgått ifrån alldeles samma roll, och vi kunna byta ut dem efter

behag. På så sätt få vi nu utan vidare fram ytterligare två formler av samma slag som (3 a). För att få symmetrien att framträda så tydligt som möjligt skola vi ordna systemen i en triangel ABC (se figuren), som vi gå runt i riktningen ABC. Varje sida förse vi med den bokstav, som anger efterföljande punkts relativa hastighet med avseende på närmast föregående punkt. Sidan CA är härvid försedd med beteckningen $-w$, emedan detta uppenbart är A:s hastighet relativt till C. Utbyta vi nu u mot v, $-w$ mot u och v mot $-w$, så måste formel (3 a) fortfarande ge riktigt resultat, ty detta betyder ju blott, att vi betrakta C som banvallen, A som tåget och B som personen i tåget, i det vi för övrigt upprepa hela resonemanget ord för ord. På så sätt erhålla vi

$$(w - u)\beta(v) = v\beta(w)\beta(u), \tag{3 b}$$

samt genom ännu ett liknande ombyte

$$(u + v)\beta(w) = w\beta(u)\beta(v). \tag{3 c}$$

Genom parvis multiplikation av ekvationerna (3 a, b, c) finner man efter en enkel omformning följande tre relationer, ur vilka man även kan få tillbaka de tre förstnämnda ekvationerna, om man endast tillfogar det i sakens natur liggande antagandet, att β är positiv:

$$\frac{\beta^2(u) - 1}{u^2} = \frac{\beta^2(v) - 1}{v^2} = \frac{\beta^2(w) - 1}{w^2} = \frac{1}{uv} - \frac{1}{vw} - \frac{1}{uw}. \tag{4}$$

Emedan två av hastigheterna u, v och w kunna väljas godtyckligt, måste tydligen storheten $\frac{\beta^2(u) - 1}{u^2}$ vara en konstant, som vi av skäl, som strax skola förstås, beteckna med $-\frac{1}{c^2}$. Vi erhålla sålunda:

$$\beta(u) = \sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{5}$$

Vidare måste den i u, v och $-w$ symmetriska relationen

$$\frac{1}{uv} - \frac{1}{wv} - \frac{1}{uw} = -\frac{1}{c^2} \tag{6}$$

var uppfylld, varur följer

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}. \tag{7}$$

Med (5) och motsvarande uttryck för $\beta(v)$ och $\beta(w)$ tillsammans med relationen (7) äro våra ekvationer (3 a, b, c) tillfredsställda. Genom att välja en lämplig beteckning för konstanten i formel (6) ha vi sålunda erhållit relativitetsteoriens uttryck för $\beta(u)$ samt det Einsteinska additionsteoremet (7) för parallella hastigheter. Vi ha härvid underförstått, att uttrycket på vänster sida av (6) är negativt, vilket får uppfattas som ett särskilt antagande, som ger uttryck åt den erfarenhet, att det blir svårare och svårare att öka en kropps hastighet, ju mer den närmar sig till ljushastigheten.

Genom att gå tillbaka till ekvationerna (3 a, b, c) kunna vi lätt härleda en del av de formler, som spela en roll vid relativitetsteoriens betraktelser. Exempelvis ger (3 c)

$$\beta(w) = \frac{w}{u+v}\,\beta(u)\,\beta(v),$$

vilket på grund av (7) för till den nyttiga relationen

$$\beta(w) = \frac{\beta(u)\,\beta(v)}{1+\frac{uv}{c^2}}. \tag{8}$$

Om bestrålningsrisker vid röntgendemonstrationer.

Av SVEN BENNER.

Som bekant (inom vissa vetenskapliga kretsar dock enligt förf:s erfarenheter alltför litet bekant), erbjuder röntgenarbete utan tillräckliga skyddsanordningar stora risker, i det att röntgenbestrålning av människokroppen med doser över en viss gräns framkallar mer eller mindre svåra, stundom livsfarliga skador, som aldrig helt gå tillbaka. På grund av röntgenstrålarnas kumulativa verkan kunna även mycket små stråldoser, upprepade tillräckligt ofta under årens lopp, leda till dylika skador. Då inga strålskyddsanordningar pläga förekomma vid röntgendemonstrationer i skolor, föreligger därför den möjligheten, att strålskador skulle kunna uppstå trots de svaga rör, som oftast användas. På förslag från lärarkretsar har jag därför gjort några mätningar på rör av den i skolor brukliga typen, alltså enkla gasrör, 7—12 cm i diameter, utan några regenereringsanordningar och matade med induktorier av olika typer. Rör och induktorier ha delvis ställts till mitt förfogande av lektorerna C. J. Bergholm, E. Jönsson och T. Wetterblad samt firmorna R. Grave och P. A. Norstedt & Söner.

Vid försöken har (utom då rörens hårdhet förhindrat elektriska mätningar med de till buds stående apparaterna) dels medelströmstyrkan uppmätts med ett vridspolinstrument, dels toppspänningen på röret med hjälp av kulgniststräcka. Dessutom har i de flesta fall röntgenstrålningens intensitet uppmätts med hjälp antingen av en kondensatorkammare

enligt SIEVERT[1] eller en standardkammare enligt THORAEUS.[2] Resultaten upptagas i bifogade tabell. Den uppmätta intensiten är där överallt reducerad till 10 cm avstånd från antikatoden (under antagande att intensiteten är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet) och uttryckt i *r* per minut.[3] I de fall, där intensiteten ej direkt uppmätts, har ett approximativt värde beräknats ur den observerade spänningen och strömstyrkan genom jämförelse med de rör (nr 4, 7 och 8), för vilka såväl intensitet som strömstyrka och spänning uppmätts. Som ledning ha härvid använts mätningar av THORAEUS över sambandet mellan röntgenstrålintensitet, strömstyrka och spänning. Intensiteten antogs proportionell mot $i \cdot V^{1,2}$, där i = strömstyrka och V = toppspänning. De på så sätt beräknade värdena, vilka endast kunna anses riktiga till sin storleksordning, ha satts inom parentes (rör 1—3 i tabellen).

Rör	Strömkälla	*kV*	*mA*	*r*/min vid 10 cm avstånd
1	Induktor med mekanisk avbrytare ..	14	0.2	(19)
1	Samma men med ökad primärspänning	16	0.4	(46)
2	Samma som närmast ovanstående ..	17	0.4	(49)
3	Samma typ som nr 1	30	0.08	(19)
4	» » » » 1	18	0.04	9.2
5	Induktor med elektrolytisk avbrytare	hög	låg	13
6	Samma typ som nr 5	hög	låg	1.5
7	» » » » 1	18	0.02	1.5
8	» » » » 1	16	0.055	4.6

För bedömande av frågan huruvida de i ovanstående tabell upptagna strålningsintensiteterna kunna anses vara riskabla, fordras dels kännedom om den biologiska verkan

[1] Se denna tidskr. årg. *16*, 145 och Kosmos, bd. 12.

[2] Se denna tidskr. årg. *16*, 57 och Kosmos, bd. 10.

[3] 1 *r* är den röntgenstrålmängd, som i 1 cm^3 luft av 0° och 760 mm tryck med fullt utnyttjande av sekundärelektronerna från luften men undvikande av alla väggverkningar alstrar så många joner, att vid mättningsström en elektricitetsmängd om 1 elektrostatisk enhet uppmätes.

av olika, i *r* uttryckta doser, dels om de i praktiken förekommande bestrålningstiderna och avstånden och om huru ofta en och samma person kan komma att träffas av sådana bestrålningar.

Om den första frågan kan sägas, att vid den ifrågakommande relativt mjuka strålningen en dos om 300 *r* kan anses motsvara den s. k. huderytemdosen (HED), den dos som under vissa betingelser framkallar en reaktion i form av hudrodnad.[1] Det anses nu allmänt, att strålningsdoser upp till $^1/_{10}$ HED (30 eller ev. 60 *r*) per år äro oskadliga även under en lång följd av år. Av naturliga skäl har ovanstående »toleransdos» ej kunnat bestämmas noggrant, och vissa skäl tyda på att den är väl snävt tilltagen, men för säkerhets skull skola vi räkna, som om den vore riktig. Dessutom bör beaktas, att den angivna toleransdosen tänkes någorlunda jämnt fördelad över hela årets arbetsdagar; vid en röntgendemonstration i en skola får man hela årsdosen under loppet av några få minuter, något som enligt röntgenterapins erfarenheter bör öka dess verkan betydligt.

Vad den senare frågan beträffar, torde förhållandena växla starkt från den ena institutionen till den andra. Vi skola nedan göra beräkningar för vissa antaganden om bestrålningstider och avstånd; den som finner, att de ej passa in på hans förhållanden, kan lätt göra en omräkning. Antag nu, att 40 *r*/min. vid 10 cm avstånd är det mesta ett ordinärt skolrör kan prestera (de höga värdena 46 och 49 *r*/min. för rör 1—2 i tabellen äro synnerligen osäkra). Vid genomlysning av en hand håller man den vid små röntgenrör nog så nära som 6 cm från anoden; där få vi då 110 *r*/min. Genomlyses en elevs hand under $^1/_2$ min., får den 55 *r*, en med säkerhet oskadlig dos. Även om han senare i livet skulle ägna sig åt radium- eller röntgenarbete, torde denna lilla dos knappt vara av betydelse. Helt annat bleve förhållandet om läraren toge sig för att genomlysa sin egen hand;

[1] Många författare, särskilt tyska, sätta 1 HED oberoende av strålningens hårdhet till 600 *r*.

skall då hela klassen se det, tar detta kanske 10 min., vilket ger ej mindre än 1100 *r*. Redan som engångsdos är detta mycket allvarligt, och om det upprepas år för år, kan det få ödesdigra följder.

Ibland förekommer fotografering av en hand; enligt uppgift från det läroverk, där rör nr 3 användes, är exponeringstiden där 2—3 min. vid 20 cm avstånd. Detta ger i maximum 15 *r*, en även vid årligt upprepande ofarlig dos. Hårdare rör, som ge mer genomträngande strålar, möjliggöra fotografering med ännu mindre doser. Säkrast är dock givetvis att vid både genomlysning och fotografering använda döda föremål, t. ex. den bekanta portmonnän.

Vidare får man räkna med allmänbestrålning av kroppen. I detta avseende kan tydligen endast läraren vara utsatt för risk. På 50 cm avstånd får han under 20 min. en dos av 32 *r*, en även vid årligt upprepande sannolikt ofarlig dos. Föregås emellertid demonstrationen av en långvarig förberedelse, föreligger avsevärd risk.

Det bör framhållas, att beräkningarna endast gälla rör och strömkällor av den art, som använts vid dessa försök. Även med dem kan man nog tillfälligtvis komma upp till högre intensiteter, t. ex. om ett nytt gasrör matas med en kraftig induktor, såsom de som användes för rör 5—6. Då jag gjorde mina mätningar, voro dessa rör gamla och hade blivit mycket hårda, sannolikt på grund av överbelastning, därför att en så kraftig strömkälla använts. Strömstyrkan var för liten för att kunna mätas på det använda instrumentet. Många rör (t. ex. nr 6—7 i tabellen) ge å andra sidan så låg intensitet, att risk endast kan antas föreligga vid mycket långvarigt arbete.

Skulle någon lärare ha anledning misstänka, att hans rör går med väsentligt högre effekt än de vid dessa mätningar använda rören, i vilket fall arbete med de i ovanstående beräkning antagna tiderna och avstånden kunde erbjuda risker, är det, om röret ej är för hårt, ej svårt att approximativt mäta strömstyrka och spänning på ovan angivet sätt och

därur uppskatta intensiteten. En annan ledning ger ljusstyrkan på fluorescensskärmen. Några av de av mig undersökta rören gåvo mycket svagt ljus, andra mera, men även i bästa fall var ljusstyrkan måttlig. Benen i handen kunde tydligt urskiljas först sedan ögonen en liten stund vant sig vid mörkret. Om något rör ger en särskilt briljant bild på skärmen, är det tillrådligt att mellan röret och handen inskjuta ett filtrum om 1 mm aluminium för att nedbringa intensiteten särskilt av de mjukaste strålarna, som nästan helt absorberas i huden och äro särskilt skadliga därför. Det är givet, att detta kriterium endast är mycket approximativt och att det slår fel, om den använda fluorescensskärmen är gammal och dålig.

Vid röntgenarbete i större skala är ett mycket fullständigt allmänt strålskydd oundgängligen nödvändigt för såväl direkt primärbestrålning som för sekundärstrålning; vid skolarbete torde det enligt ovanstående beräkningar i allmänhet vara överflödigt. Vid arbete med särskilt hög intensitet eller lång arbetstid (t. ex. vid enskilt arbete) bör skydd åtminstone mot primärstrålning uppbyggas av blyplåt eller tungt blyglas. Dessutom bör arbetet så långt möjligt ordnas så, att man ej uppehåller sig i närheten av röret, medan det är i gång.

Som allmän slutsats kan sägas, att den av de flesta skolröntgenrör utsända strålningen visserligen är så svag, att i allmänhet ingen risk för skador föreligger, men att man å andra sidan arbetar så pass nära toleransgränsen, att särskild uppmärksamhet bör riktas härpå. Det behövs blott ett särskilt kraftigt rör och strömkälla och litet längre demonstrationstid än strängt nödvändigt (ovan ha vi ju räknat med endast $^1/_2$ minut per elev!) för att en påtaglig risk skall föreligga. *Under alla omständigheter är det förkastligt att läraren använder sin egen hand för genomlysningsförsök.*

Radiumhemmets Fysiska Laboratorium, Stockholm i jan. 1935.

Ringankare och trumankare.

Av G. ÖDBERG.

Ringankaret, som låg till grund för de första tekniskt brukbara likströmsmaskinerna, är numera fullständigt utträngt av trumankaret. Det kan därför synas tämligen omotiverat med en jämförelse mellan de båda konstruktionernas egenskaper. Emellertid håller ringankaret sig fortfarande kvar i de flesta läroböcker — väl mest beroende på att förhållandena äro lättare att överblicka hos ringlindningen än hos trumlindningen och att man enkelt kan gå över från den förra till den senare. Orsakerna till att trumlindningen kommit att bliva den allenahärskande äro i regel knapphändigt och oklart framställda i läroböckerna, varför det ansetts lämpligt att giva en kritisk jämförelse mellan de båda ankartyperna.

Av såväl ring- som trumlindningar finnas ett antal olika typer; varje typ förekommer både som ring- och trumlindning. Att närmare ingå på detta är onödigt, då i det följande endast förutsättes kännedom om den »vanliga» ring- resp. trumlindningen (parallellindningen), vilken är välbekant för tidskriftens läsare.

Vi skola först något beröra ankarlindningens allmänna anordning.

Lindningen är uppbyggd av element, som benämnas *härvor*. Utgår man från en lamell på kommutatorn och följer lindningen åt ena eller andra hållet, tills man åter kommer till en lamell, har man just genomlöpt en härva. Härvan består av ett antal *lindningsvarv*. De delar av

härvan, vari flödesändringen sker (som »skära kraftlinjer») och i vilka spänningen således induceras, kallas *härvsidor;* de delar, som sammanbinda härvsidorna, benämnas de *fria lindningsdelarna* eller *härvändarna.* Hos ringlindningen har man alltså enligt denna definition *en* härvsida, hos trumlindningen *två* härvsidor per härva. Härvsidorna äro hos alla trumlindningar och »yngre» ringlindningar förlagda i *spår* på ankarkärnans yttre, mot luftgapet vända sida.

Om två ankare ha samma dimensioner på ankarkärnan och det ena är ringlindat, det andra trumlindat men i båda

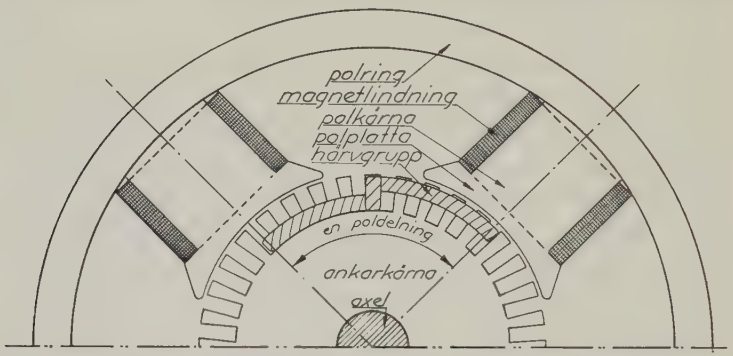


Fig 1. Skiss av mindre, trumlindad, 4-polig likströmsmaskin med en härvgrupp inlagd.

fallen med samma antal härvsidor, så blir den inducerade spänningen under i övrigt lika förhållanden densamma i de båda fallen. Man kan säga, att ring- och trumlindningen representera två olika sätt att sammankoppla ledarna i luftgapet, så att de inducerade spänningarna adderas. För att ovanstående påstående om den inducerade spänningen skall vara strängt riktigt, måste följande förutsättningar vara uppfyllda: dels måste hos *trumlindningen* avståndet mellan de båda härvsidorna i härvan — härvans *omfattning* — vara exakt en poldelning (se fig. 1), dels få hos *ringlindningen* ej induceras spänningar i ledarna på ankarets innersida, som kunna motverka de i ledarna

på yttersidan inducerade. Vad det förra beträffar, är det ofta med hänsyn till strömvändningen eller *kommuteringen* lämpligt att utföra härvorna med en omfattning, som något skiljer sig från en poldelning. En närmare undersökning visar, att denna s. k. *stegförkortning* i normala fall ej har märkbar inverkan på den inducerade spänningens storlek. Det andra villkoret medför, att hos ringlindningen måste den konstruktionsdel, *ankarcentrum,* som förbinder själva *ankarkärnan,* (»ringen»), med axeln, helt eller delvis utföras av omagnetiskt material (t. ex. brons eller mässing). Om nämligen kraftlinjer tränga ut på ankarets insida, så induceras i de där förlagda ledarna spänningar, vilka reducera totala spänningen. I själva verket uppkommer även med omagnetiskt material ett visst läckfält speciellt om induktionen i ankarkärnan är hög, men hos väl utförda konstruktioner medför detta ingen nämnvärd reducering av den inducerade spänningens storlek.

Under det att *poltalet* jämte ankardiametern enligt ovan bestämmer härvomfattningen hos trumlindningen, så kan ett ringankare, om man ser saken endast ur lindningsteknisk synpunkt, oförändrat användas för godtyckligt poltal, (givetvis förutsatt att antalet härvor är tillräckligt stort).

Ur *kommuteringssynpunkt* finnes en viss kvalitativ skillnad mellan de båda lindningarna, och man kan säga, att förhållandena principiellt ligga något enklare till hos ringlindningen än hos trumlindningen. Det skulle emellertid föra för långt att vidare utveckla detta förhållande, som för övrigt ej är av större betydelse i detta sammanhang.

Vi övergå nu till att jämföra de båda ankartyperna ur konstruktiv och ekonomisk synpunkt.

Eftersom härvorna hos ringlindningen omsluta ankarkärnan, måste de tydligen *för hand* lindas direkt på denna. Härvorna hos trumlindningen kunna likaledes lindas direkt i spåren, men vid alla större maskiner tillverkas de i förväg med hjälp av *lindningsformar* och inläggas sedan på sina platser i spåren. I ett spår förlägges ett jämnt antal härv-

sidor, ordnade i två över varandra lagda skikt. Genom lämplig formgivning av härvändarna ernår man, att i varje härva den ena härvsidan kommer att tillhöra det undre skiktet, den andra det övre. De härvor, vilkas härvsidor bilda undre skiktet i ett spår och övre i ett annat, utgöra sammans en *härvgrupp*.

Av det sagda torde framgå, att trumlindningen är mindre tidsödande att utföra, lämpar sig bättre för fabriksmässig framställning och följaktligen ställer sig *billigare* än ringlindningen. Detta torde vara en av de viktigaste orsakerna till att ringlindningen blivit undanträngd.

Undersöker man spänningsskillnaden mellan en härvsida i undre lagret och den ovanför liggande, finner man, att den varierar under ankarets rotation, och att den i vissa lägen uppgår till fulla ankarspänningen. *Isolationen* mellan övre och undre skiktet får dimensioneras med hänsyn härtill. Hos ringankaret blir spänningen mellan närliggande härvor väsentligt mindre. Emellertid möter det inga svårigheter att åstadkomma en betryggande isolation hos trumankaret för de i praktiken förekommande spänningarna.

På grund av trumlindningens speciella utförande är det förenat med ganska mycket arbete att taga ut en härva från sin plats i ankaret. Av detta skäl är i regel ett ringankare lättare att reparera än ett trumankare.

De utstående härvändarna hos trumlindningen medföra, att trumankaret som helhet blir längre än ett ringankare med samma axiella längd hos ankarkärnan (»plåtlängd»). Enligt en uppgift, som professor E. Alm lämnat förf., har ringlindningen även på senare tid kommit till användning, när man önskat en kort konstruktion.[1]

Den fria delen av härvan bidrager ej till den inducerade spänningen, och då strömvärmeförlusterna i densamma öka maskinens förluster och den för övrigt utgör en onyttig

[1] I det åsyftade fallet gällde det visserligen en trefasasynkronomotor, men som bekant kunna »likströmslindningarna» användas även för växelströmsmaskiner.

ökning av kopparmängden, är det önskvärt, att förhållandet mellan längden av fria lindningsdelen och härvsidan är så litet som möjligt. Storleken av detta förhållande beror av ankarkärnans relativa dimensioner samt den speciella anordningen av fria lindningsdelen. En jämförelse mellan de båda lindningstyperna, byggd på normalt förekommande utföranden, visar att trumlindningen i nämnda avseende ställer sig gynnsammare än ringlindningen.

Vid fastläggande av *strömtätheten* hos en lindning måste man taga hänsyn till de olika lindningsdelarnas möjlighet att avgiva det utvecklade värmet. Hos ringankaret är kylningen av de på innersidan belägna härvdelarna dålig, varför man i allmänhet får välja något lägre strömtäthet, än om lindningen varit utförd som trumlindning.

Hos ringlindade ankare möter det ofta, speciellt vid mindre maskiner, svårigheter att få rum med ledarna på ankarets innersida. Har man nämligen vid dimensioneringen fastlagt ankarkärnans luftgapsdiameter och längd med hänsyn till uppvärmningen, magnetiska tätheten i tänderna etc., så bestämmes ankarkärnans radiella djup och härmed innerdiametern av storleken av det flöde, som skall framdrivas. Inuti ankaret skall nu finnas plats för axel och ankarcentrum med armar, och som nämnt utfaller det återstående utrymmet ofta för litet. Man får då göra en ökning i kärnans dimensioner.

Det i de tre sista styckena sagda kan uttryckas så, att ringlindningen utnyttjar det aktiva materialet (koppar och järn) sämre än trumlindningen.

Som sammanfattning av ovanstående jämförelse skulle man kunna uttala följande: I principiellt avseende äro de båda ankartyperna så gott som alldeles likvärdiga; en maskin försedd med ringlindning har väsentligen samma driftsegenskaper som en med trumlindning. Trumankarets fördelar äro av konstruktiv och ekonomisk art.

Tekniska Högskolan, Institutionen för Elektromaskinlära i januari 1935.

En optisk universalapparat.

Av B. WAHLSTRÖM.

För ett par år sedan nämnde min kollega, adjunkt CARL RENDAHL, att han en gång låtit göra en enkel apparat för grundläggande optiska försök, grundad på principen »*rörlig* ljuskälla (glödlampa) vid försök med en Hartl's skiva». Principen intresserade mig mycket och jag har, efter en del experimenterande med ett par olika typer, förfärdigat en apparat enligt följande »ledmotiv»: Apparaten skall vara en optisk (demonstrations-) bänk, som samtidigt ersätter Hartl's skiva, ljuskällan en glödlampa, rörlig i förhållande till en fast skiva, varjämte »cylinder»-linser och -speglar icke skola användas, utan billiga, hela linser.

Skenan, i vilken hållarna för linser o. d., »löparna», äro flyttbara, är en Svenska Metallverkens löpskena (artikel n:r 3179) av mässing (pris c:a 1:60 kr. per meter). Tvärsnittet (se fig. 1 och 2) har ytterdimensionerna 19 × 9 mm, de inre äro 15 × 5 mm. Löparnas konstruktion synes av fig. 3. Varje löpare har två hållare, vilket visat sig mycket ändamålsenligt. Löparen »låses» vid skenan genom skruven i den urtagna mittendelen. Skruven är nedtill försedd med en bricka av c:a 13 mm diameter (för undvikande av märken i skenan) och vrides med en liten hävstång i övre delen. Låsning sker med ytterst obetydlig kraftanvändning genom några få graders vridning.

Löpskenan är 75 cm lång (i fig. 1 av utrymmesskäl ytterst starkt förkortad) och fastsatt vid en linjal av hårt trä, graderad i cm.

Man kan »arbeta» på skenan i två huvudlägen, dels så att löparna »stå» (fig. 1), dels »ligga» (fig. 2). Skenan och

linjalen äro fastskruvade vid de båda skenhållarna *A* (fig.1), vilka i sin tur äro fastskruvade vid ett stadigt stålrör ($^3/_4$″ kalldraget cykelrör), vilket är vridbart i hållaren *B*. Denna hållare *B* kan i sin tur roteras kring axeln *D* och får en stadig och jämn gång genom den lilla stoppskruven *E*, som »löper» i ett spår i axeln. Med skruvarna *F* och *G* kan skenan och hållaren *B* låsas i olika lägen med obetydlig åtdragning. Axeln *D* låses fast i den vågräta delen av dubbel-muffen *K*—*L* medelst skruven *H*. Den vertikala muffdelen är flyttbar på stativet ($^3/_4$″ stålrör i tung fot).

Med skenan i läget i fig. 1 arbetar man tydligen som på en vanlig optisk bänk. Läget i fig. 2 är det för de grundläggande försöken viktigaste.. Skenan, linjalen, hållaren *B*, axeln *C* och axeln *D* äro genomborrade med ett hål, genom vilket axeln *M* (8 mm silverstål) kan sättas in och låsas med skruven *N*. (Axeln borttages således, då man arbetar i läget i fig. 1.) På denna axels yttersta del *O* fästes skivan, som visar strålgången (Hartl's skiva). Genom lossande av skruven *G* kan man tydligen vrida skenan (med på densamma i löparna monterade apparater) centrerat kring stålaxeln *M* med den fasta skivan. Det hela är, ehuru det måhända ser »gillrigt» ut, mycket stabilt.

Fig. 4 och 5 visar de två till apparaten hörande skivorna (sedda framifrån och från sidan). De äro utsvarvade ur 2 mm hård aluminiumplåt; diametern är 30 cm.

Till den första skivan höra: en plan metallspegel (se fig. 9 och foto), c:a 6 × 2 cm, en halvcirkelformad glasplatta (se fig. 10), diameter ej fullt 10 cm, en planparallell glasplatta, och en triangulär sådan med c:a 10 cm kant och vinklarna 50°, 60° och 70°. Plattorna äro c:a 1 cm tjocka. Spegeln och plattorna kunna fästas vid skivans centrum med två kraftiga pianosträngsfjädrar (fig. 4 och 9), försedda med kulor i ändarna, överdragna med en liten bit gummiligatur. Med denna anordning sitta delarna synnerligen stadigt och skruvar genom plattorna undvikas.

Skivan i fig. 5 är avsedd för demonstrationen av ljusets

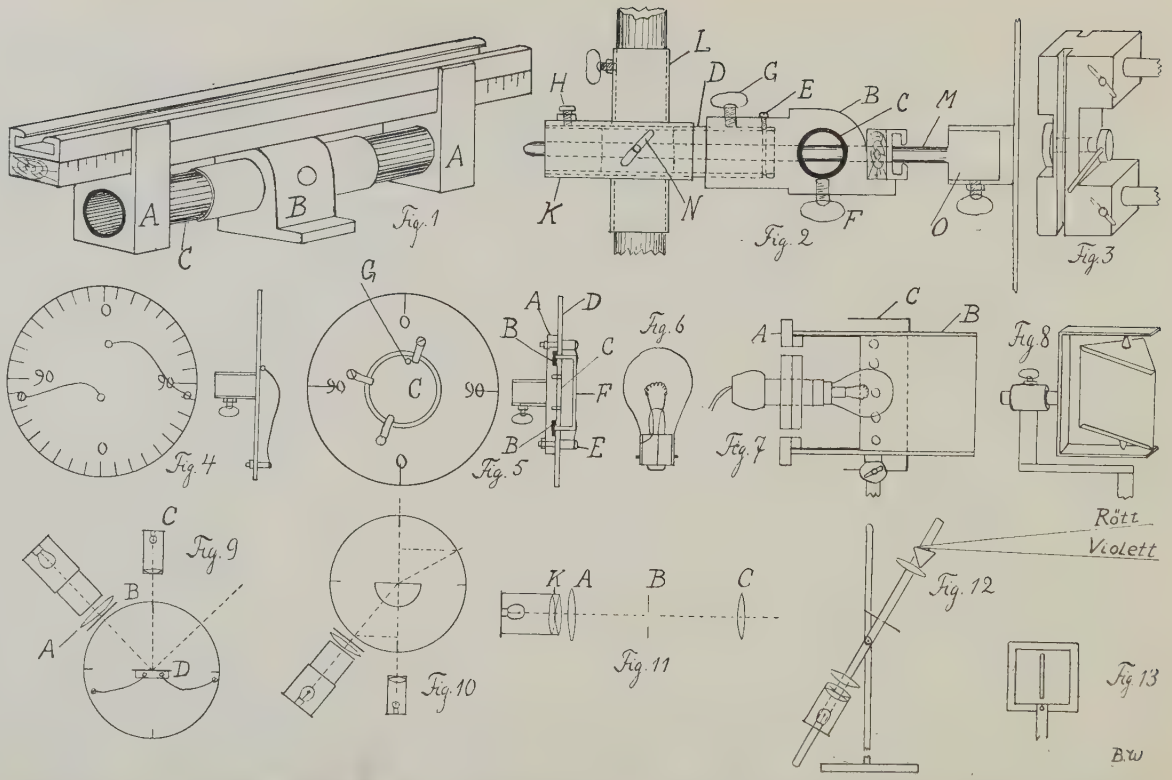


Fig. 1—13. 1. Skena med hållare (i stark förkortning). 2. Snitt genom monterings-partiet. 3. Löpare. 4 o. 5. Skivorna sedda framifrån o. från sidan. 6 o. 7. Lampa och lamphus. 8. Prisma-montering. 9. Reflexion i planspegel. 10. Brytning glas-luft. 11 o. 12. Spektrum. 13. Spalt-hållare.

brytning i vätskor. Ur aluminiumplattan *A* (3 mm gods, c:a 20 cm diameter) är utsvarvat ett c:a 1 mm djupt spår av en bredd, som passar till en vanlig 10 cm syltburkspackning (*B*). Ur den stora skivan (30 cm, 2 mm gods) är utskuren en cirkel (*C*) i mitten, sådan att en 10 cm glas-skål (Petri-skål) går omkring den. Denna platta är fastnitad vid den förut nämnda 3-mm-plattan (*A*). Den återstående »ringen» (*D*) är fastskruvad vid plattan *A* medelst tre genomgående skruvar (muttrar på baksidan av *A*) med »stolpar» *E* på framsidan av *D*, försedda med fjädrar, som pressa fast glas-skålen *F* mot gummipackningen. Genom hålet *G* fylles skålen precis till hälften med vätskan. Dess nedre del motsvarar då den förut nämnda halvcirkelformade glasplattan.

Innan jag övergår till beskrivning av ett par försök, några ord om ljus-källan, lins-montering m. m.

Som ljuskälla använder jag en (»Osram») strålkastarlampa för bilar (art. n:r 7569), en-polig, liten bajonettfattning (fig. 6), spänning 12 volt, effekt 50—60 watt, ljusstyrka enligt fabrikens uppgift c:a 100 normalljus, vilket synes ganska rimligt. Lystråden är väl centrerad och praktiskt taget rätlinig, sedd framifrån, samt av liten utsträckning i vertikal led. En approx. punktljus-lampa således, med små dimensioner och god ljus-styrka. Lampan är monterad som fig. 7 visar. Bakplattan *A* (fiber), på vilken lampan är fästad, är fastsatt vid ett mässingsrör, förskjutbart och vridbart i lamphuset *B*. (Luft-hål bakåt och runt om på lamphuset under »skärmen» *C*.) Lamphuset kan förlängas framåt med ett »bländar»-rör.

De använda linserna äro av Norstedts billiga linser (c:a 60 mm diameter) à 1: 50 kr. De äro infattade i mässingsrör (c:a 12 mm bredd, varigenom de ej beröra bordsytan, då de läggas) och fasthållas av ett par ringar av hård 1,5 mm mässingstråd. Varje fattning är omgiven av en rund skärm av 0,5 mm mässingsplåt. Linsuppsättningen utgöres av 2 à 3 bikonvexa, 1 bikonkav lins av nyssnämnd typ och 15 cm

brännvidd, 1 på 20 cm brännvidd och en mindre lins på 10 cm brännvidd. Dessutom 1 à 2 större linser (75—80 mm diameter) på 15 cm brännvidd. Jag har dessutom gjort en kondensor av två av de förstnämnda linserna, som kan inskjutas i lamphusets främre del. (Avstånd till lystråden, då lampa och kondensor äro fullt inskjutna, c:a 3,5 cm). En konvex och en konkav vridbar spegel tillhöra även utrustningen.

Som hållare för spalter, bländare o. d. kan jag rekommendera vanliga enkla hållare för skioptikonplåtar (à 50 öre, fig. 13). Spalter och bländare äro klippta samt huggna, frästa eller borrade ur 0,5 mm mässingsplåt, svärtade med lapislösning i värme och mattsvart-fernissade.

Prismat (ett Norstedts mindre flintglas-prisma) är på C. RENDAHLS förslag monterat i en »gaffel» (fig. 8), vilket är väsentligt bättre än ett bord.

Samtliga »pinnar» till linser m. m. äro så avskurna, att linsernas centra komma i samma höjd, då de helt nedsättas i löparna. Centreringen är även i sidled överraskande god, trots den billiga optiken.

Några försök:

1. *Reflexion i planspegel:* Läge på skenan som i fig. 2. Lamphuset försett med förlängningsrör. A = lins (+ 15 cm brännv., 75 mm diam.); B = spalt (c:a 6 cm lång, 1 mm bred). Lampans lystråd bör stå parallellt med spaltens längdriktning; lampan i linsens fokus.

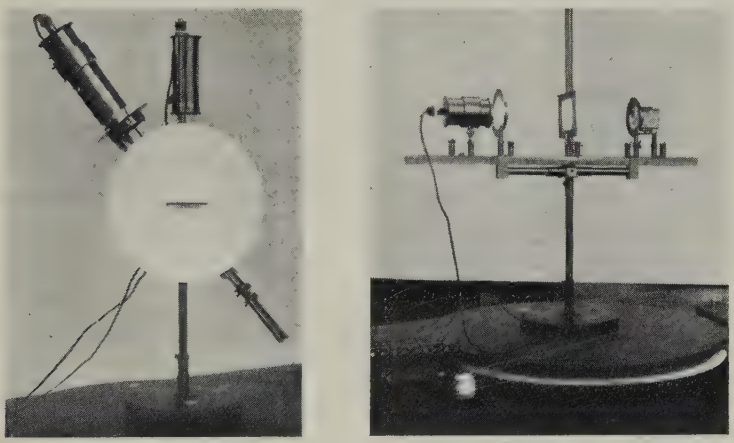
Såväl här som i försök 2, 3 och 4 använder jag även en liten »normal-lampa» (*C*), vilken genom en lins och en spalt kastar en normal mot spegeln (*D*). Som lampa begagnar jag här en (»Osram» 4 $^1/_2$ volts) cykellampa vars lystråd är rak och av god ljusstyrka. Lampan är vridbart monterad på stålaxeln (*M* fig. 2).

Genom förskjutning av huvudlampan och användning av en plåt med flera parallella spalter kan reflexion av parallellt, konvergent och divergent ljusknippe visas.

2. *Ljusbrytning i glas. Brytningsgräns. Totalreflexion.*

Lampa och spalt som förut. Vid lampläge som i fig. 9 fås brytning luft-glas. I fig. 10 synes anordningen för brytning glas-luft. (»Normallampan» kan givetvis bibehållas i samma läge som i fig. 9). Brytningsgräns och totalreflexion framträda vackert. — »Sinuslinjerna» mätas med mm-skala med gott resultat.

3. *Ljusbrytning i vätskor.* Anordning som i försök 2. Plattan innanför petri-skålen är omålad, varigenom även



a b

Fig. 14. Apparaten på vridscenen: a. Reflexion i planspegel med löparna liggande. b. Demonstration av spektrum med löparna stående (ej såsom i fig. 12).

färg-lösande vätskor kunna ihållas. Strålen synes utmärkt på aluminium. Lägges den halvcirkelformade glasplattan inuti skålen och fylles denna upp till tappningshålet med vatten, kan formeln $n_{vg} = n_{vl} \cdot n_{lg}$ gott verifieras. Man kan även fylla den nedre halv-skålen med vatten, den övre med eter e. d. och upprepa samma försök.

4. *Ljusbrytning i prisma. Minimideviation.* Den trekantiga glasplatta fästes med en av sidorna gående genom centrum på skivan. Normalen riktas mot denna sida (i

centrum). Den två gånger brutna strålen uppfångas på en skärm.

5. *Spektrum.* Skenan i samma läge som i föreg. försök (stålaxeln borttagen). Anordning enl. fig. 11 och 12. K = kondensor, A = lins (+ 15 cm), B = spalt, C = projektionslins (+ 15 cm). Spalten B placeras strax innanför lins-systemets K-A fokus, varigenom den blir kraftigt belyst. Linsen C ger en skarp, *vågrät* bild av spalten på en skärm. Omedelbart efter C insättes prismat, och det hela vrides uppåt så, att spektrum kommer på skärmen, som således ej behöver flyttas. Hela strålgången synes från klassen. Göres synlig med cigarrök eller med finfördelad magnesia, utsprutad med en liten insekts-spruta.

Man arbetar snabbt och säkert med apparaten, till vilken ett kort-system över försöken, med angivande av lampans, linsernas m. m. placering på skenan, är upprättat. Har man dessutom *allt* placerat på ett hemmagjort rullbord med flera hyllor, vinner man ytterligare tid. Alla försök, som ingå i realskolans optik-kurs, torde kunna utföras med apparaten, som även är en god projektionsapparat.

Till denna har jag även gjort en »rök-låda» av svartmålad kryssfanér, i vilken hela apparaten kan placeras. Framsidan är försedd med en lös ram, i vilken jag spänt cellophan (finnes i ark på 90 × 100 cm; 30 öre). Glas är bra men tungt och dyrt. Baksidan är ett skynke av svart klot, försett med ett fönster av cellophan med »gardin» (en svart klot-lapp). Lådan fylles med cigarrök eller med rök från en mycket liten magnesiumblixt (c:a $^1/_2$ cm^3). Strålgången framträder mycket vackert. Röken kvarstannar säkert omkring $^1/_2$ timme.

Måhända bör jag nämna, att jag även använder en »vridscen» (se fig. 14), gjord av två runda plattor (75 cm diameter) av lamellträ (c:a 15 mm tjock). Den undre plattan är fast, d. v. s. står på bordet på tre glidknappar. Plattorna äro förenade med en tapp genom centrum, fastsatt vid den övre plattan, som således kan vridas runt. Fyra små möbel-

rullar, (som rulla mot den undre plattan) göra vridscenen både stabil och lättrörlig. Jag placerar apparaten på »scenen», monterar och justerar allt, vänd mot klassen och svänger därefter det hela mot denna. Underlättar arbetet på många sätt och spar många steg. Användbar även vid många andra tillfällen.

Delarna till apparaten, som jag själv tillverkat med undantag för skivorna, hållarna *B* och *A* (fig. 1) samt gaffeln (fig. 8), vilka läroverkets maskinist H. Berggren hjälpt mig med, äro i svartoxiderad mässing. Herr Berggren liksom givetvis adjunkt Rendahl är jag stor tack skyldig för många goda råd.

Norstedts skolavdelning kommer att låta tillverka apparaten och vridscenen enligt ovanstående beskrivning, möjligen med undantag för en eller annan detalj.

En metod att demonstrera stående longitudinell vågrörelse.

Vågrörelseapparaterna kunna uppdelas i två grupper, sådana, där en verklig vågrörelse framkallas och sådana, där den efterhärmas. Apparater av den första typen kunna ju synas pedagogiskt värdefullast men ha i allmänhet det felet, att vågrörelsen försiggår så snabbt, att man har svårt att följa förloppet. Även den andra apparattypen har sitt berättigande. Man kan här få rörelserna att gå långsammare, de ansluta sig bättre till de konstruktioner, som man alltid måste göra på svarta tavlan vid undervisningen inom vågrörelselären och levandegöra dessa på ett effektivare sätt än den första gruppens apparater. En blick i firmornas kataloger visar, att båda grupperna äro rikligt representerade med en mängd konstruktioner, mer eller mindre komplicerade och i allmänhet ganska dyra.

Till den andra gruppen hör följande anordning, enkel, åskådlig och prisbillig. Varje fysiklärare kan på ett par timmar själv förfärdiga den. I ett tidigare meddelande i denna tidskrift, bd 14 sid. 231, angavs, hur man med hjälp av en projektionsapparat kan demonstrera en fortskridande transversell eller longitudinell vågrörelse, som utbreder sig längs en rad partiklar. På liknande

sätt kan en stående longitudinell vågrörelse framställas, särskilt ägnad att förtydliga svängningsförloppet i orgelpiporna. Man använder skivorna i fig. 1 a—d. De bestå av glas, överklistrade

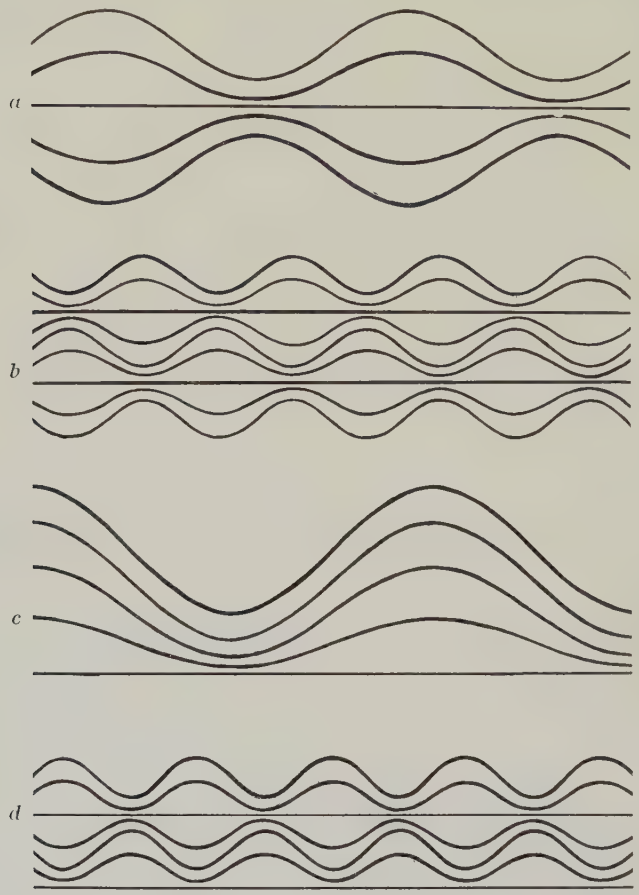


Fig. 1. Den öppna pipans grundton (*a*) och första överton (*b*); den slutna pipans grundton (*c*) och första överton (*d*).

med kartong, i vilken kurvorna utskurits. Konstruktionen av dessa är skäligen enkel. Man har endast att låta två transversella vågrörelser med samma våglängd och amplitud gå fram i motsatt riktning genom en partikelrad, ett tidsintervall T/8 i taget, alldeles som vid vanlig konstruktion av den stående transversella vågen

och för varje förskjutning upprita interferensvågen. Utskärningen av den färdiga kurvan sker bäst med en välslipad kniv, vars blad blivit tvärt avbrutet, så att ett skarpt skärande hörn bildats. Man låter en glasskiva bilda underlaget, och det är lätt att med kniven följa den ritade linjen. Efter någon övning kan man skära ut en kurva på några få minuter. Kartongstycket övermålas efter slutad utskärning med China-lack och uppklistras på sin glasskiva t. ex. med »Pandetikon».

I öppningen till skioptikonapparatens plåthållare placeras, så som omnämnes i föregående meddelande, en mindre skiva med en vertikalt ställd spalt och bakom denna skjutes en av de större skivorna långsamt och med jämn hastighet. Med skiva *a* erhålles på duken svängningsförloppet för den öppna pipans grundton och med skiva *b* dess första överton; skiva *c* ger den slutna pipans grundton och skiva *d* dess första överton. Svängningarna framträda med all önskvärd tydlighet och visa åskådligt, att partiklarna i noden ständigt befinna sig i vila, att de i buken röra sig livligt men varken bilda förtätning eller förtunning och att partiklarna på ömse sidor om en nod ständigt röra sig åt motsatt håll. Detta svängningsförlopp är svårt att visa på annat sätt, och tiden räcker väl sällan till för att göra motsvarande konstruktion på tavlan. Oftast torde undervisningen bli dogmatisk och eleverna få nöja sig med bokens ord.

Arvid Leide.

Vad är 1 kilogram?

Ett tillägg.

Uppsatsen med ovanstående rubrik i denna tidskrifts marsh. 1934 har glädjande nog vunnit ett visst beaktande bl. a. genom att några rättelser införts i T. Moll, Lärobok i fysik, del V, vars 9:de upplaga utkommit i år. Men rättelserna hava inskränkts till att omfatta det egentliga metersystemet och hava icke nått den klyfta, som skiljer ingenjörens tekniska enheter från den s. k. vetenskapliga uppfattningen. I nämnda lärobok, sid. 18 och 25, framställes »Det Tekniska systemet, M.K.S.-systemet», med grundenheten för massa 1 Kilogram = massan av den internationella prototypen för kilogrammet. Som *härledd* enhet angives enheten för kraft, 1 kilogramkraft (kgf) = den kraft, som ger massan 1 kg (enl. föreg. definition) en acceleration $g_0 = 9{,}80665$ m/sek^2. Slutligen uppgives, att detta system skulle användas *»inom många av fysikens tillämpningsområden, speciellt det mekaniska och värmetekniska».*

Så är icke förhållandet. Den stora klyftan består alltjämt, som framgår av vad som nämnts på sid. 13 och 20 i nyssnämnda uppsats i denna tidskrift. I stället för att utfylla klyftan — vilket försökts i Molls fysik — bör man lämpligen hellre klart belysa den:

Det tekniska M.K.S.-systemet låter kilogramkraften vara den fundamentala enheten och massan den härledda.

Den i Molls lärobok använda kraftenheten är i överensstämmelse med allmän teknisk uppfattning, även om definitionen i teknisk litteratur icke alltid[1] göres så skarp, att normalaccelerationen anföres.

Den »tekniska» *massenheten* enl. Moll är däremot *icke* i överensstämmelse med teknisk uppfattning. Teknikens enhet för massa är lika med $9{,}80665 \times$ massan av internationella prototypen för kilogrammet vid noggrann räkning.

Vi kunna finna belägg för dylika uppfattningar av det tekniska måttsystemet t. ex. i K. A. Ahlfors, Vattenturbiner (D.T.V. V: 1); »Hütte»; W. Schüle, Technische Thermodynamik; A. Stodola, Die Dampfturbinen; O. Lueger, Lexikon der gesamten Technik, art. Masse; Deutsche Industrie-Normen (DIN) 1305, m. fl.

Utan att härmed taga ställning till det pedagogiska värdet av det i de båda senaste upplagorna av Molls lärobok införda s. k. M.K.S.-systemet skulle jag vilja föreslå, att i kommande upplagor en annan rubrik användes för systemet och att därjämte ett kort omnämnande av det verkliga, tekniska M.K.S.-systemet må förekomma. Till detta system var det för övrigt, som Moll själv i tidigare upplagor av läroboken anslöt sin framställning.

J. Tandberg.

De tekniska enheterna för kraft och massa.

I ovanstående meddelande har dr Tandberg påtalat, att det i sista upplagan av Moll-Rudbergs dynamik beskrivna tekniska enhetssystemet, benämnt meter-kilogram-sekundsystemet, icke överensstämmer med det inom tekniken vanligaste, och det har också från andra håll gjorts gällande, att man funnit det

[1] Jfr t. ex. franska lagen av $^2/_4$ 1919, där det bl. a. heter: "*Le Kilogramme-poids ou Kilogramme-force, force avec laquelle une masse égale à 1 Kilogramme est attirée par la Terre. Le Kilogramme-poids est pratiquement égal à 0,98 centisthène.*" (1 Sthène, sn $= 10^8$ dyn). — Den tyska definitionen i »Hütte» har normalacceleration. — Landolt-Börnstein, II (5:e uppl. 1923) s. 785, låter det tekniska måttsystemet ha kraftenheten: »1 Gramm-Gewicht $=$ 980,616 Dyn», baserat på ett för 45° lat. o. s. v. *beräknat* g $=$ 9,80616 m/sek^2.

alltför djärft att i en lärobok för gymnasiet framföra ett ännu icke allmänt antaget enhetssystem. Undertecknad, som vid fysikundervisningen dels i gymnasiet och särskilt vid Tekniska högskolan fått starkt intryck av olägenheterna med det äldre tekniska måttsystemet, sådant det även förekommer i de tidigare upplagorna av Molls lärobok, och som sedan flera år vid undervisningen vid Tekniska högskolan förordat samma enhetssystem, som framlagts av Rudberg, ber att få göra ett par påpekanden till ytterligare belysning av frågan.

Pedagogiskt sett har det nya måttsystemet enligt min mening stora fördelar, vilka kanske enklast komma till synes vid behandlingen av kraftekvationen. Denna skrives vid användning av det äldre måttsystemet

$$k = m\,a, \text{ där } m = \frac{p}{g} \text{ och alltså } k = \frac{p}{g}\,a.$$

Jämte kraften k och accelerationen a komma här två olika massbegrepp till användning, dels den »tunga» massan eller vikten p, vars enhet är kilogrammet, dels den »tröga» massan m, vars enhet är massan hos cirka 9,8 kilogram. Den pedagogiska olägenheten med denna dubblering av massbegreppet framträder kanske icke så mycket inom de olika tekniska specialområdena, där man i allmänhet räknar efter ett inlärt schema, men blir mycket besvärande, då den studerande ställes inför de mångskiftande fysikaliska problemen.

Rudberg skriver däremot kraftekvationen:

$$k = \frac{1}{9{,}80665}\,m\,a \text{ eller kort } k = \frac{1}{9{,}81}\,m\,a.$$

Han undviker därvid att införa någon speciell dynamisk massenhet; m är den »tunga» massan eller vikten, vars enhet är kilogrammet. Förekomsten av en talfaktor i ekvationen bör icke vålla några svårigheter, då de studerande redan tidigt torde ha klart för sig, att en på valet av enheter beroende talfaktor förekommer i alla fysikens ekvationer, även om den i många fall genom lämpligt val kan sättas $= 1$.

Rudberg står nu visst icke så ensam i sin inställning till dessa frågor, som man på sina håll synes förmoda. Det finns i de tre punkter, där han avviker från det i de äldre upplagorna av Molls lärobok använda måttsystemet åtskilliga auktoriteter bland författare av läroböcker och författningar att åberopa.

1. Användningen av ordet massa i betydelsen tung massa jämställt med eller som ersättning för ordet vikt finner stöd bl. a. i en stor del av den tyska fysikaliska läroboksliteraturen även-

som i svensk lagtext. Så användes ordet massa jämsides med ordet vikt i den nya lagen om mått och vikt av den 11 maj 1934.

2. Då Rudberg undviker att införa en särskild enhet för den tröga massan, gör han detsamma som bl. a. åtskilliga tyska författare av fysiklärоböcker från senare tid. Denna speciella enhet för trög massa, som gör massan hos 9,8 liter vatten till ett, synes aldrig ha blivit särskilt populär bland fysikerna och tycks heller aldrig ha fått en erkänd benämning. Jag har icke heller kunnat finna denna enhet ens omnämnd i ett sådant arbete som Gehlhoffs Lehrbuch der technischen Physik av år 1921, en omfattande lärobok redigerad av en framstående tekniker och avsedd för teknologer. Att denna enhet alltjämt användes inom vissa tekniska specialområden, kan icke vara tillräcklig motivering för en fordran på att den skall omnämnas i en kortfattad lärobok för gymnasiet. Personligen hyser jag den förhoppningen att den nu uppväxande generationen, som redan i skolan fått anvisning på hur man kan undvika den komplikation, som en uppdelning av massan i »tung» och »trög» massa innebär, skall komma att genomföra denna förenkling även i den tekniska litteraturen.

3. Rudberg definierar kilogramkraften som tyngdkraften på massan 1 kg vid $g = 9{,}80665$. Man kan här möjligen diskutera om för g det konventionella värdet för Paris 9,80665 eller värdet för 45° latitud 9,80616 bort anföras. Det förra har dock den stora fördelen att redan vara lagt till grund vid definiton av tryckenheten atmosfär.

G. Borelius.

Ett par enkla ljusabsorptionsförsök med en röntgenskärm.

För åtskilliga år sedan inköptes till Lunds Katedralskola en s. k. ossalskärm, avsedd till genomlysningsförsök med röntgenstrålar. Enligt uppgift från leverantören (Bergman & Beving, Stockholm) utgöres den verksamma beståndsdelen av på syntetisk väg framställd willemit. Skärmen, vars yta inom ramen är 23×17 cm², uppbär två handtag med plana skyddsmanschetter av järn och en icke mindre än 4 mm tjock täckglasskiva; allt tydligen anlagt på att hindra de för människokroppen skadliga röntgenstrålarna att tränga ut genom skärmen, ty det visade sig, att icke allenast metallen utan även glaset fullständigt hejdade dessa strålar.

När jag vid ett tillfälle ledde ljuset från en båglampa genom ett kolsvavelprisma och uppfångade spektrum på ossalskärmen, fann

jag till min överraskning i övergången mellan rött och grönt två mörka linjer eller smala band, som emellertid endast för riktig avpassning av prismats ställning och avstånd från skärmen framträdde skarpt (se fig.).[1]

Linjerna försvunno dock genast, om ett vitt papper lades över skärmen, så att spektrum i stället uppfångades på detta papper. Likaledes försvunno de, om skärmens täckglas avlägsnades och spektrum projicierades direkt på den underliggande, preparerade skivan. De mörka linjerna bero således på absorption av gula färgnyanser vid ljusets gång fram och åter genom täckglaset.

Det är synnerligen instruktivt att utföra denna undersökning inför lärjungarna och likaledes följande enkla men slående försök. Med skyddsglaset återställt på sin plats i skärmen täckes det till halva sin yta med ett vitt papper, och belysning sker växelvis med en vanlig glödlampa och en natriumlåga.[2] I det förra fallet råder ingen väsentlig olikhet i utseende mellan de båda skärmhälfterna, i det senare fallet ser den ej övertäckta delen av skärmen gråsvart ut i jämförelse med den andra.

Ett annat intressant resultat erhålles, om man, sedan glasplattan frigjorts från skärmen, låter solljus eller elektriskt bågljus passera genom plattan, ena gången i en riktning, som är vinkelrät mot plattans båda största begränsningsytor, andra gången vinkelrät mot dess båda minsta. I det förra fallet ser glasplattan vattenklar ut, i det senare lyser den klart bärnstensgul, trots att ljusets väg genom plattan i detta senare fall är många gånger längre och därvid det gula ljuset borde ha fullständigt absorberats. Den skenbara motsägelsen löses i ett slag, om man analyserar det genomgånga ljuset med tillhjälp av ett spektroskop, framför vars spalt glasplattan hålles. I det förra fallet framträda förnämligast det vita ljusets tre huvudfärger: rött, grönt och blåviolett, i det senare endast rött och grönt. Vid den längre passagen har således blåviolett ljus absorberats (jämte alla spår av gult), och glasskivan måste då lysa i det blåvioletta ljusets komplementfärg gult, som

[1] Fig. återger ett foto av båglampans emissionsspektrum, projicerat på ossalskärmen och för orienteringens skull överlagrat av natriumgasens absorptionsspektrum, som upptagits på en å skärmens täckglas fästad vit, smal pappersremsa. Man ser (tydligare på originalfotot) den omvända natriumlinjen som ett fint, mörkt streck löpa i riktning av den inre kanten till det mot rött vettande vänstra absorptionsbandet i huvudspektrum. Vid fotograferingen har givetvis en pankromatisk plåt använts. Fotot är taget av förf.

[2] Resultatet blir detsamma, även om natriumlågan av bekvämlighetsskäl hålles tänd under hela detta försök.

här dock ej är en ren spektralfärg utan en blandfärg av rött och grönt.

Den icke minsta förtjänsten hos ossalskärmen eller, rättare, dess glasskiva ligger däri, att man med dess hjälp lätt och bekvämt kan fokusera en fast, vitglödande kropps spektrum, som, projicierat på en vanlig vit bakgrund, ju saknar hållpunkter i form av karakteristiska linjer. En dylik fokusering eller skarp inställning har jag för någon tid sedan varit nödsakad att göra, då det gällde att pröva en nyanskaffad linjär termostapel som indikator på ultraröd strålning. Först sedan prisma och ossalskärm orienterats, så att de båda absorptionslinjerna framträdde med största möjliga skärpa, erhölls fullgott resultat med termostapelns bestrålade lödställen på ossalskärmens plats.

Detta meddelande om ossalskärmen har tillkommit med särskild tanke på de läroanstalter, som äga en dylik. Fysiklärarna vid dessa anstalter torde med fördel kunna draga nytta av skärmens här påpekade egenskaper. *Gust. Forsström.*

Verifikation av Biot-Savarts lag för en cirkulär elektrisk ström.

För åskådlig och direkt mätning i dyn av magnetiska krafter lämpar sig den av Müller[1] konstruerade dynmetern, som består av en c:a 1 m lång pendel, där pendelkulan väger nominellt 1 g (egentligen 1 g minskat med trådens halva vikt). Bakom pendelns nedre del sitter en spegelskala (fig. 1), graderad i mm. Pendeltrådens längd ned till skalans mittpunkt (0) är 981 mm; den horisontella kraft (k), vilken från 0 förskjuter pendeln 1 mm, blir då lika med 1 dyn. Förf. begagnar vid nedan beskrivna försök en något modifierad form av dynmetern, i det att pendelvikten rör sig i vatten där dess tyngd är jämt 0,5 g (med hänsyn tagen till upptryck och trådvikt). Varje mm:s förskjutning motsvarar då 0,5 dyn, och inställningen sker fortare tack vare vattnets dämpning.[2] Vid mätningarna har med fördel använts en c:a 30 cm lång, s. k. Robinsonsk magnet med kulformade poler. Spetsen på dess nordända har försetts med en liten metallkrok (fig. 5). Magneten har upphängts på i fig. 4 (förstorad skala) angivet sätt. Den är fästad vid undersidan av två med varandra medelst

[1] Se F. C. G. Müller: Technik des phys. Unterricht, Berlin 1906, s. 223 u. f. samt Karl Rosenberg: Exp.-buch für den Unterricht, Zweiter Band, Wien-Leipzig 1924, vierte Auflage, s. 269.

[2] För att kunna minska apparatens höjd, begagnar förf. upptill en förskjutbar mässingsstav, vilken uppbär pendeltråden. Staven tryckes ned, då app. ej användes.

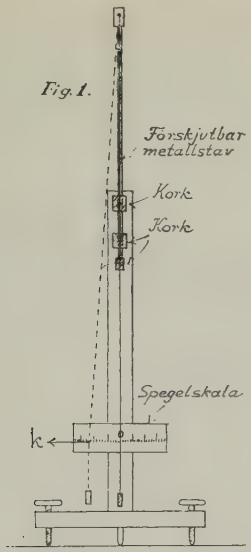


Fig. 1.

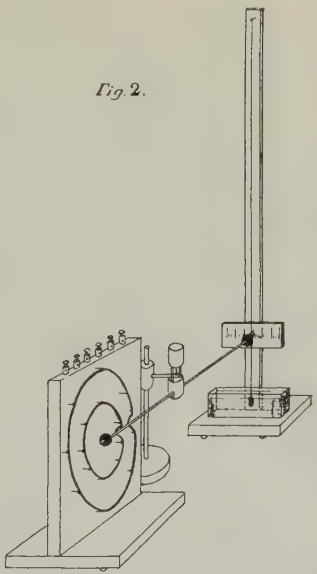


Fig. 2.

metalltrådar förbundna korkar. I mitten av den övre korkens undersida är inborrat ett upptill ihopsmält glasrör. På en hård stålspets (grammofonnål e. d.), fästad vid en i ett stativ höj- och sänkbar arm, anbringas sedan magneten enl. fig. 5 i vågrätt läge.[1]

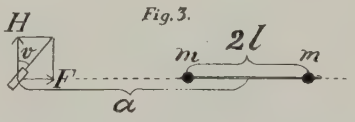


Fig. 3.

De cirkulära ledningarna fästas på en vertikal träskiva (fig. 2). Den inre ledningen utgöres av 1 varv med 5 cm radie, den yttre av 1, 2 eller 3 varv med 10 cm radie.

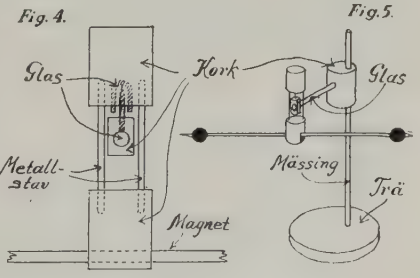


Fig. 4. *Fig. 5.*

Bestämningarnas utförande. Först bestämmer man magnetens polstyrka (m) genom de exprimentellt erhållna värdena på m/H och mH.

a) m/H fås genom att

[1] Då det är av stor vikt, att friktionen i upphängningspunkten är liten, torde agat vara betydligt bättre än glas. Tyvärr ställer sig agat alltför dyrbart.

placera magneten i 1:sta Gauss'ka huvudläget i förhållande till en med skala försedd liten kompass (fig. 3). Magnetens fältstyrka (F) på avståndet a blir med på fig. 3 använda beteckningar

$$F = \frac{4al}{(a^2 - l^2)^2} \cdot m, \quad \text{varav} \quad \frac{m}{H} = \frac{(a^2 - l^2)^2}{4al} \cdot tgv. \tag{1}$$

b) mH bestämmes med dynmetern, där skalans (och pendelns) plan inställes i magnetiska meridianen. Magnetens ena pol får, medan magneten befinner sig vinkelrätt mot magnetiska meridianen, verka på pendeln. Härvid avläses kraften (k) i dyn. Om magnetens halva längd från spetsen till mitten är lika med l_1 och från polen till mitten l, så gäller

$$2Hml = kl_1, \quad \text{varav} \quad mH = \frac{kl_1}{2l}. \tag{2}$$

Av (1) och (2) erhålles

$$m = \sqrt{\frac{(a^2 - l^2)^2 kl_1}{4al^2}} \cdot tgv = \frac{a^2 - l^2}{2l} \cdot \sqrt{\frac{kl_1}{a}} \cdot tgv. \tag{3}$$

c) *Bestämning av fältstyrkan i mittpunkten av en cirkulär ledning.* Apparaturen uppställes enligt fig. 2, så att magneten och de cirkulära ledningarna komma i magnetiska meridianplanet och dynmetern vinkelrätt däremot. Pendeln »krokas» på magnetens nordpol och dess sydpol inställes noga i de cirkulära ledningarnas mittpunkt. Pendelns jämviktsläge avläses (s_0) på skalan (lämpligen med förstoringsglas), varefter strömmen slutes i någon av de cirkulära ledningarna i sådan riktning, att sydpolen rör sig utåt från det bräde, på vilket ledningarna äro monterade. Genom att försiktigt flytta dynmetern vinkelrätt mot meridianen återföres magnetpolen (S) till sitt ursprungliga läge, varefter dynmetern avläses (s) och kraften (k) beräknas.

Följande resultat erhöllos vid ett nyligen utfört laborationsförsök.

a) Bestämning av m/H.

Magnetens längd mellan polerna $2l = 30$ cm.

a	v	m/H
50 cm	10°,5	320
45 »	13°,6	290
40 »	21°,8	304
35 »	32°,6	307
	Medeltal:	305

Varje värde på utslagsvinkeln v har erhållits som medeltal av fyra avläsningar. Resultat: $m/H = 305$.

b) Bestämning av mH.

Magnetens halva längd var mellan polerna $l = 15$ cm och mellan spetsarna $l_1 = 16{,}5$ cm. Dynmeterns utslag i medeltal: $s_0 - s = 20{,}0$ mm. Härav erhålles den verkande kraften $k = 10{,}0$ dyn och

$$mH = \frac{10 \cdot 16{,}5}{2 \cdot 15} = 5{,}5.$$

Av a) och b) beräknas polstyrkan, $m = 41$.

c) Bestämning av magnetfältets styrka.

Beteckningar: n = varvantal; r = radie i cm; I = strömstyrka i amp; $s_0 - s$ = utslag å dynmetern i mm; k = kraft i dyn; k/m = magnetfältets styrka i gauss.

n	r	I	$s_0 - s$	k	k/m obs.	k/m ber.
1	5	1,0	10,0	5,0	0,122	0,126
1	5	2,0	20,5	10,3	0,251	0,252
1	5	3,0	31,0	15,5	0,378	0,378
1	10	1,0	5,0	2,5	0,061	0,063
1	10	2,0	10,0	5,0	0,122	0,126
1	10	3,0	14,6	7,3	0,178	0,188
2	10	1,0	10,0	5,0	0,122	0,126
2	10	2,0	21,0	10,5	0,256	0,252
2	10	3 : 0	31,5	15,8	0,385	0,378
3	10	1,0	15,2	7,6	0,185	0,188

Varje värde av $(s_0 - s)$ utgör medeltal av c:a fyra observationer. Sista kolumnens siffror hava erhållits genom fältstyrkans beräkning enligt Biot-Savarts lag. Differensen mellan observerade och beräknade fältstyrkor uppgår ej till mer än högst 4 %.

Apparaterna till ovanstående försök tillverkas och försäljas av Rudolph Grave A/B, Stockholm.

Lundsberg i januari 1935.

Ivar J:son Malmborg.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Från årsmötet i Stockholm i januari 1935.[1]

Föreningen avhöll sitt första årsmöte i Stockholm den 8—9 jan. 1935. Mötet inleddes med stadgeenliga förhandlingar å Tekniska Högskolans fysiska lärosal, varvid närvoro c:a 75 medlemmar. I sitt hälsningstal erinrade ordf. rektor B. Söderborg om den förlust föreningen lidit genom laborator B. Beckmans under året timade frånfälle. Under allmän anslutning hyllades hans minne; med tacksamhet skulle föreningen minnas laborator B:s insatser.

Styrelse-[2] och revisionsberättelse upplästes och godkändes, och ansvarsfrihet beviljades skattmästaren, varefter val förrättades. Avgående ordf. anmälde sig förhindrad mottaga återval. Till hans efterträdare som föreningens ordf. valdes enhälligt rektor J. S. Hedström, Stockholm. Den nyvalde ordf. beklagade de förhållanden, som tvingat rektor Söderborg att avsäga sig ordförandeskapet och frambar till honom föreningens hjärtliga tack för hans framgångsrika arbete för föreningens syften.

Av den avgående styrelsen återvaldes alla utom överste S. Bergelin, prof. F. Carlson och adjunkt C. E. Blom, vilka avböjt återval. Nyvalda blevo lektor G. Mikaelsson, Norrköping, prof. M. Riesz, Lund, överstelöjtnant R. Sjöberg, Stockholm och adjunkt B. Wahlström, Stockholm. Revisorerna f. d. byråchefen E. Göransson och överlärare E. Hedfors återvaldes. Senare under mötet konstituerade sig styrelsen, varvid valdes till v. ordf. lektor C. Bergholm, Stockholm och till sekr. och skattmästare lektor C. Lönnqvist, Södertälje. Till arbetsutskott utsågos ordf., v. ordf., sekr. jämte adjunkterna Wahlström och Wettervik.

Efter förhandlingarna vidtog visning av de fysiska och elektrotekniska institutionerna vid Tekniska Högskolan under ledning av resp. föreståndare professorerna G. Borelius och S. Velander med biträde av ett flertal assistenter. Uppdelningen av de besökande i mindre grupper gjorde denna rundvandring synnerligen instruktiv. Experiment och demonstrationer av apparater i funktion gåvo stor behållning. Senare förevisades på samma sätt den kemiska institutionen.

[1] Tidigare medd. från föreningen: årg. *16*, 1933 sid. 226; årg. *17*, 1934 sid. 46 och 113.

[2] Se sid. 45.

Mellan kl. 3 och 6 hade deltagarna tillfälle bese en i samband med årsmötet anordnad utställning av apparater från skilda firmor. Representerade voro: Bergman och Beving, Rudolph Grave, P. A. Norstedt & Söners skolmaterielavdelning, Ingenjörsfirman Georg Schönander, Elektriska A.-B. Siemens och A.-B. Max Sievert, alla i Stockholm. Samtliga hade lagt sig vinn att visa moderna och aktuella apparater inom fysikens och kemiens olika grenar. Synnerligen vackra demonstrationer gjordes; i en del fall voro visserligen apparaterna för dyrbara för skolbruk, men förevisningarna hade givetvis oberoende härav sitt stora värde.

Efter gemensam middag å Teknologföreningens restaurang vidtog på kvällen diskussion — med lektor Hj. Olson som inledare — om den reform av matematikstudiet å realgymnasiet, som genom Kungl. förordningen tillkommit kort före årsmötet och om de ändringar i kursplanerna i matematik, som betingas härav.

Den nämnda förordningen (Svensk författningssamling nr 626—627) syftar till att förbättra matematikens nuvarande ställning å realgymnasiet, vilken så ödesdigert försvagades genom 1933 års stadga. Genom förordningen införes en särskild tillvalskurs i matematik, omfattande 2 veckotimmar i vardera av realgymnasiets två högsta ringar. Denna kurs benämnes »matematik specialkurs» och blir helt skild från den »allmänna (obligatoriska) kursen» (enl. 1933 års stadga). I denna specialkurs — med skilda skrivningar och skild betygssättning — avser man att ungefär samma kurs i matematik skall medhinnas som enl. 1928 års stadga. En ny ämnesgrupp »matematik specialkurs, fysik och kemi» inrättades samtidigt.

Lektor Olson redogjorde för dessa författningsändringar, vilka tillkommit på grundval av hans förslag, och motiverade desamma. Lektor O. påpekade särskilt, att den införda specialkursen gick fri från de anmärkningar, som från föreningens styrelse riktats mot det förslag till specialkurs, som K. Skolöverstyrelsen tidigare (i febr. 1934) framlagt (se denna tidskrifts marshäfte 1934, sid. 46).

Emellertid kräver den införda specialkursen en justering av kursplanerna i fråga om den »allmänna kursen». I en till ecklesiastikdepartementet ingiven promemoria hade talaren lämnat förslag härtill (hade på föreningens initiativ tryckts och tillhandahölls vid mötet; medlemmar som ej närvoro, kunna från sekr. erhålla ex. härav). En viktig förutsättning för att den till specialkursen anslagna tiden skall kunna utnyttjas effektivt är bl. a., att eleverna före differentieringen förts tillräckligt långt i matematik (även nödvändigt med hänsyn till fysikens krav). Ett svårt hinder att ordna den saken utgör den svaga underbyggnad i matematik,

som vår nuvarande realskola ger efter 1933 års nedskärning av timantalet för matematik. Lektor Olson beklagade, att realskolan ej nu fått åter några av dessa förlorade timmar. Hans uppdrag hade emellertid varit begränsat till realgymnasiet.

Ett sätt att — inom ramen för nuvarande timantal i realskolan — vinna ett i någon mån förbättrat underlag för gymnasiekurserna vore — menade talaren — att utbyta de s. k. praktiska uppgifterna (växlar, aktier, obligationer o. d., vilkas praktiska värde man ofta kunde ifrågasätta) mot mer rent matematiska element, särskilt algebra. Han höll för sannolikt, att man så skulle kunna vinna 2 veckotimmar för den egentliga *matematik*-kursen i fråga om de clever, som efter avlagd realexamen genomgå 3-årigt gymnasium. Då dessa elever utgöra flertalet, ansåg han sig ej behöva taga hänsyn till de övriga, för vilka vinsten skulle bli avsevärt mindre. En dylik kursomläggning vore enl. lektor O. den enda för närvarande möjliga utvägen till förbättring av underlaget för gymnasiets matematikkurs. Arbetet för ett ökat timantal på realskolan finge emellertid ej avstanna.

Den följande diskussionen rörde sig huvudsakligen kring de nyssnämnda praktiska problemen. Förslaget att utbyta dem mot en ökad träning i algebra vann stöd av adjunkt B. Wahlström, under det att lektor A. Wahlgren, adjunkt K. Ryrberg och rektor S. E. Ohlon talade för bibehållande av dessa uppgifter. Den senare höll före, att det vore nödvändigt att strö in praktiska tillämpningar i matematiken för att hålla intresset vid makt.

Samtliga i diskussionen deltagande framhöllo, att man i varje fall ej kunde vinna så mycket tid genom den föreslagna kursomläggningen, som inledaren beräknat.

Kontentan av diskussionen var den, att alla — inledaren såväl som opponenterna — voro ense om att frågan om matematikstudiet i våra läroverk icke var löst med den senaste delreformen, vare sig nu denna reform var ett steg i rätt riktning, varom inledaren var övertygad, eller om det hela måste göras om efter helt andra linjer, vilket flertalet opponenter yrkade på.

Den andra mötesdagen inleddes med en talrikt besökt föreläsning om »Det tunga vätet» av t. f. prof. dr G. Frey, som gav en synnerligen klar och intressant framställning av det aktuella ämnet.

Efter lunchrast gjordes studiebesök vid fabriker och institutioner: Liljeholmens stearinfabrik, Lumas glödlampsfabrik, den helautomatiska telefonstationen vid Jakobsbergsgatan, Föreningen för Ljuskulturs och Stockholms elektricitetsverks gemensamma utställning vid Regeringsgatan. På det sistnämnda stället höll

ingenjör G. Nilsson ett orienterande föredrag om nyare belysningsteknik, särskilt om de nya fotometriska enheterna och moderna fotometriska metoder.

CONRAD LÖNNQVIST.

Styrelseberättelse för 1934.

Föreningen bildades vid konstituerande möte den 14 okt. 1933. Styrelsen konstituerade sig vid sammanträde samma dag.

Syrelsens sammansättning har varit: laborator B. BECKMAN, Uppsala †; överste S. BERGELIN, Sthlm; lektor C. BERGHOLM, Sthlm; adjunkt C. E. BLOM, Sthlm; lektor E. G. BOLINDER, Uppsala; prof. F. CARLSON, Sthlm (v. ordf.); lektor K. DAHR, Örebro; prof. C. HEUMAN, Saltsjöbaden; prof. B. HOLMBERG, Sthlm; lektor A. LARSSON, Göteborg; lektor M. LEMOINE, Uppsala; lektor C. LÖNNQVIST, Södertälje (sekr.); prof. J. MALMQUIST, Sthlm; lektor EVA RAMSTEDT, Sthlm; lektor G. STARCK, Sthlm; rektor B. SÖDERBORG, Sthlm (ordf.); lektor A. WAHLGREN, Sthlm; adjunkt E. WETTERVIK, Sthlm.

Styrelsen har sedan föreningens bildande hållit 5 protokollförda sammanträden. Dess arbetsutskott, som utom av ordf. rektor B. SÖDERBORG har bestått av v. ordf. prof. F. CARLSON, lektor C. BERGHOLM och sekr. lektor C. LÖNNQVIST, har hållit 3 protokollförda sammanträden.

Styrelsen har under detta föreningens första arbetsår ägnat huvudparten av sitt arbete åt utredningen av 1933 års läroverksstadgas brister i fråga om tim- och kursplaner i matematik och fysik. Ett flertal, även icke protokollförda sammanträden inom såväl styrelsen som arbetsutskottet ha ägnats åt arbetet med anskaffandet och sammanställandet av det material härutinnan, som samlats till den broschyr »Den senaste läroverksreformen», som styrelsen utgav i början av år 1934.

Denna broschyr har legat till grund för flera av de motioner, som riksdagen 1934 avgåvos för ändring av 1933 års stadga. Den har utdelats gratis till samtliga riksdagsmän och vissa ämbetsmän samt till åtskilliga tidningar. Den torde ha upplyst och påverkat opinionen till förmån för en reform av matematikens ställning vid läroverken. Riksdagen uttalade sig ju även för ett avhjälpande i vissa hänseenden av bristerna i fråga.

Av broschyren ha 381 ex. sålts genom skattmästaren till föreningens medlemmar och andra intresserade efter rekvisition. Därjämte har broschyren varit tillgänglig i bokhandeln i distri-

bution genom C. E. Fritzes bokförlag, för vilken försäljning redovisning dock skall ske först under år 1935.

Då K. Skolöverstyrelsen den 5 febr. 1934 avgav ett yttrande över den på remiss från Kungl. Maj:t erhållna skrivelse från Tekniska Högskolan i Stockholm, som finns intagen som Bil. B. i styrelsens nämnda broschyr och Överstyrelsen i detta sitt yttrande förordade en tilläggskurs i matematik i realgymnasiets högsta ring som ett botemedel mot läroverksstadgans brister, författade arbetsutskottet som en slags fortsättning av den redan utkomna broschyren en kritik av detta Skolöverstyrelsens förslag, utmynnande i att nämnda förslag måste avvisas även som provisorium. Detta tillägg till styrelsens broschyr utdelades likaledes till riksdagen och till vederbörande ämbetsmän.

En till Kungl. Maj:t ställd underdåning inlaga från Matematisk-naturvetenskapliga sektionen vid Lunds universitet i anledning av matematikens inskränkning vid läroverken har tryckts och på liknande sätt distribuerats.

Då lektor Hj. Olson i slutet av år 1934 hade slutfört sitt uppdrag att inom ecklesiastikdepartementet utarbeta ett förslag till förstärkning av matematiken å reallinjen, lät styrelsen omedelbart trycka hans båda promemorior i ärendet (utom i de delar, som samtidigt utkommo som författning, Svensk Författningssamling n:r 626—627). Av dessa tryck ha c:a 250 utsänts till de högre allmänna läroverken, medan återstoden av upplagan hålles medlemmarna tillgänglig vid årsmötet som utgångspunkt för den till årsmötet som programpunkt upptagna diskussionen kring denna viktiga fråga.

Under hösten 1934 anordnade styrelsen den 13 nov. ett möte med förevisning av Flygtekniska laboratoriet vid Tekniska Högskolan i Stockholm jämte föredrag av prof. I. Malmer. För detta möte utsändes kallelsekort till samtliga medlemmar i Stockholm med omnejd. Demonstrationen, som bevistades av ett 60-tal medlemmar, syntes i hög grad väcka intresse.

Slutligen har arbetet under året gällt att värva nya medlemmar inom allt vidare kretsar för att så, dels vinna ökat gehör för föreningens strävanden, dels förbättra föreningens ekonomi. Medlemsantalet har också stigit, från 330 vid föreningens bildande till 625. Av dessa utgöres c:a $^3/_4$ av läroverkslärare, de övriga av studerande och lärare vid universitet, högskolor, seminarier och tekniska skolor, av ingenjörer, försäkringsmän och andra det praktiska livets målsmän.

I nämnda medlemssiffra ingår 128 medlemmar i Lunds lokalavdelning av föreningen, vilken bildades i mars 1934. Även om

många av dess medlemmar redan tidigare tillhörde huvudföreningen, så har nämnda lokalavdelnings bildande tillfört föreningen många nya medlemmar och ökat möjligheterna för huvudföreningen att förverkliga sina syften. Lokalavdelningen i Lund har bedrivit en livlig verksamhet, med föredrag, demonstrationer och diskussioner och har för denna sin verksamhet understötts av huvudföreningen.

Å styrelsens vägnar

BENKT SÖDERBORG, ordf. CONRAD LÖNNQVIST, sekr.

Naturvetenskapliga dagar i Lund.

»Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning» i Lund sammanträdde den 3 och 4 mars på Fysiska institutionen i Lund. Detta föreningens första årsmöte, som givits form av »Naturvetenskapliga dagar» med föredrag och diskussioner över vetenskapliga och pedagogiska frågor, hade samlat ett 130-tal deltagare, ett antal som till det yttersta tog institutionens föreläsningssal i anspråk.

Efter hälsningstal av föreningens ordf. rektor P. G. PERSSON, upplästes och godkändes styrelse- och revisionsberättelse, varefter val av funktionärer för det kommande arbetsåret ägde rum. Härvid omvaldes till ordf. rektor P. G. PERSSON, till v. ordf. docent G. HÖSSJER, till sekr. och kassör fil. lic. BÖRJE SVENSSON och till v. sekr. fil. lic. H. NORDSTRÖM. Övriga styrelseledamöter blevo: hamndirektör G. EDLUND, rektor E. HERNQVIST, lektor A. JÖNSSON, prof. J. KOCH, lektor A. LEIDE, prof. K. LUNDMARK, rektor F. MONTÉN, rektor K. PARCK, prof. M. RIESZ, rektor S. SJÖBERG, prof. L. SMITH, lektor B. SVENSSON. Revisorer blevo adjunkt R. NORDENSTEDT och lektor G. ARVIDSSON. Vid sammanträde med styrelsen valdes till arbetsutskott: rektor Persson, prof. Koch, prof. Smith, docent Hössjer och lic. Svensson.

Föredragen inleddes av prof. M. RIESZ, som talade över ämnet »Något om gruppteoriens betydelse inom matematiken», varefter prof. L. SMITH i ett föredrag »Om valensbegreppet» gav en historisk exposé, härvid uppehållande sig särskilt vid Berzelius' uppfattning av materiens byggnad och valensens natur. Franklands, Kolbes, Kekulés, Werners, Abbes och Kossels åsikter diskuterades; framställningen avslutades med en redogörelse för Lewis teorier.

Härefter följde fysikaliska demonstrationer, utförda av prof. J. Koch. Medelst en i föreläsningssalen uppbyggd »Stark-effekt»-apparatur förevisades, hur Hβ-linjen i vätets spektrum vid anläggning av fältet spaltades i två grupper av linjer, belägna på ömse sidor av den ursprungliga, »fältfria» linjen. Vidare visades gränsen för ett mikroskops upplösningsförmåga, konisk refraktion och interferensfigurer i linearpolariserat konvergent ljus hos optiskt enaxlade och tvåaxlade kristaller. I övningslaboratoriet voro uppställda en serie historiska apparater ur Triewalds samling jämte några enkla anordningar för undervisningsexperiment över elektriska svängningar: en svängningskrets med elektronrör, givande en frekvens av 1,5 hertz samt en tonfrekvensgenerator.

Lunds observatorium demonstrerades av prof. K. Lundmark. Prof. L. gav några bilder ur observatoriets historia och redogjorde för dess utrustning; en del utomordentligt lyckade celesta fotografier förevisades.

Efter middagen diskuterade man »Kemiundervisningen vid våra skolor, dess mål och medel» med adjunkt R. Nordenstedt som inledare. Denne gav i kritisk belysning en redogörelse för de senaste läroverksreformerna och behandlade frågan om kemiundervisningens mål och undervisningens planläggning. Förhållandet till ämnena fysik och biologi berördes. Frågan om lämplig avvägning mellan ren kemi och tillämpad kemi ventilerades. Åtskilliga svagheter i nuvarande kurs- och timplaner påpekades, så bl. a. den olägenheten att de, som i det 4-åriga differentierade gymnasiet välja kemi, ej läst ämnet de två föregående åren; i realskolan kunde man tidigare läsa ämnet grundligare än nu. I diskussionen deltogo professorerna B. Hanström, H. Kylin, M. Riesz, L. Smith, adjunkt G. Thölin och lektor A. Andersson.

Måndagens första föreläsning hölls av prof. J. Koch över ämnet »Om det infraröda spektret», varvid redogörelse lämnades för det mest fundamentala på området och för de viktigaste undersökningsmetoderna samt för de slutsatser, man kan draga ur ett dylikt spektrum.

Docent O. Lundquist föreläste »Om inducerad radioaktivitet». Efter en inledande översikt av våra dagars föreställningar om atomkärnans sammansättning redogjorde f.-h. för den av I. Curie och F. Joliot i början av föregående år gjorda upptäckten av instabila isotoper, som uppkomma genom bombardement av vissa av de lättare elementen med snabba α-partiklar. Härefter följde en redogörelse för de resultat, som sedan dess vunnits vid försöken att på konstlad väg — genom bombardement med α-partiklar,

protoner, deutoner och neutroner — åstadkomma radioaktiva element, varvid f.-h. särskilt uppehöll sig vid italienaren Fermi's och hans medarbetares framgångsrika experiment med neutronbestrålning.

I ett föredrag om »Några moderna fysikaliskt-kemiska metoder för studier av molekylernas byggnad» behandlade docent O. Stelling undersökningar över dipolmoment, undersökningar med röntgenstrålar och elektronstrålar och försök ang. »Ramaneffekten».

Efter gemensam lunch på Lunds Studentkårs Konviktorium talade prof. N. Zeilon »Om interna vågor i havet». Dylika uppträda i gränsytan mellan ett tungt bottenskikt och ett lättare ytskikt. Mest kända äro inre vågor av tidvattensperiod. Dessa uppstå genom att tidvattnet utsättes för en lokal störning t. ex. ett grund. Detta demonstrerades i en vanna, som innehöll ett ytskikt av färskvatten och på vars botten anbragts ett »undervattensrev». Gränsytan mellan de båda skikten synliggjordes med anilinsvart. Vannan försattes i långsam gungning som ett gungbräde, varvid från revet utgingo inre vågor åt båda håll.

»Starka eletrolyter» utgjorde ämnet för det följande föredraget av docent L. Larsson. Efter genomgång av den brukliga terminologien redogjorde föredragshållaren för de brister, som vidlåda den äldre dissosiationsteorien. Efter flera ansatser av olika forskare gjorde Bjerrum stora framsteg med sin teori, och nu på de senaste åren har det lyckats Debye och Hückel att reda upp flera intressanta problem.

Det sista i föredragens rad var docent S. Holms över »Nyare astronomiska instrument». En redogörelse lämnades för de moderna strävandena att höja teleskopens effektivitet, att öka instrumentens dimensioner och avhjälpa avbildningsfel. Talaren uppehöll sig även vid försöken att höja speglarnas reflexionsförmåga genom att som spegelbeläggning använda aluminium i st. f. silver.

Börje Svensson.

Bokanmälningar.

Ernst Zimmer, *Umsturz im Weltbild der Physik*, 2. Aufl. Knorr u. Hirth, München 1934, 264 S., RM 4:50.

Boken avser att skildra den nya situation, som uppkommit inom fysiken i och med att strävandena att förklara yttervärldens mera påtagliga företeelser fört forskningen in på områden, där enstaka atomer och atomdelar spela en avgörande roll, en situation, som framförallt symboliseras genom den av Planck upptäckta naturkonstanten. Dess innehåll är i korthet följande. I inledningen få vi lära oss en del om fysikens metod, i det bristen på sådan metod bl. a. exemplifieras genom Goethes försök till en färglära. Första kapitlet ger en kort översikt över några grunddrag av den »klassiska» fysiken och kemien och slutar med Rutherfords stora upptäckter av atomkärnan och dess sprängning. Därpå redogöres för teorierna för ljuset samt för upptäckten av Röntgenstrålarna, varefter följer ett kapitel om ljuskvanta och därmed sammanhängande erfarenheter. De nästa två kapitlen behandla Bohrs teori för atombyggnaden, Pauliprincipen m. m. I kapitlen 6 och 7 skildras den nya kvant- och vågmekaniken, medan åttonde kapitlet innehåller beskrivningar av några nyare tillämpningar av dessa teorier på olika fenomen (heliumspektret, vätemolekylen, radioaktiviteten, neutronen och positronen). Boken avslutas med ett avsnitt benämnt »Naturphilosophie», där författaren försöker att taga ställning till den nya kunskapens principiella innebörd.

Det är inte så litet man får lära sig om den nyare atomfysiken i Ernst Zimmers bok, och den flytande, bildrika stilen gör att kunskaperna bli ganska lätta att svälja. Många ställen vittna också om en djupare insikt i de frågor det gäller och om en icke obetydlig förmåga att genomlysa svårare problem. Som exempel skall nämnas redogörelsen för nödvändigheten att begagna en med precisionen växande tid vid bestämningen av ett svängningstal, en fråga, som hänger nära samman med den Heisenbergska obestämdhetsprincipen. Författaren tänker sig, att det obekanta svängningstalet jämföres med ett bekant svängningstal genom räkning av svävningarna. Ju närmare de båda svängningstalen ligga

varandra, desto längre tid måste man vänta pa en svävning, som upplyser en om deras skillnad.

Vad redogörelsen för den nya forskningens allmänna grundvalar d. v. s. dess filosofiska innebörd angår, så torde densamma vara betydligt mindre tillfredsställande än skildringen av mera faktiska förhållanden. Detta framträder redan i framställningen av Bohrs ursprungliga atomteori, där alltför stor vikt lägges på speciella mer eller mindre provisoriska antaganden, medan korrespondensprincipen, som utgjort den egentliga ledtråden för Bohrs forskning och därmed för hela den nyare kvantteorien, inte ens nämns. Följer man författarens framställning, får man lätt den uppfattningen, att Bohrs atomteori från början närmast varit ett dumdristigt företag, som genom ren tur krönts med framgång, medan var och en, som på närmare håll följt dessa forskningar, vet att »djärvheten» i Bohrs teori helt och hållet bottnar i dess upphovsmans kraft att genomtränga problemen till grunden.

När författaren sedan i sista kapitlet uppfattar den förnyade diskussionen om orsakslagen som en strid mellan positivism och metafysik, torde detta vara att ge saken väl uppstyltade uttryck. Det är så svårt att veta, vad dylika ord skola beteckna, och det är fara värt, att de vid flitigt begagnande snart komma att verka som karikatyrer, positivismen av det naturliga kravet att inte göra stora ord om ting, om vilka ingen upplysning kan lämnas, metafysiken av det sakförhållandet att tillvaron har sidor, som icke uttömmas genom fysikens undersökningsmetoder. Detta sista kapitel är väl heller icke fritt från den särskilt i England populära tendensen att göra elektronerna och andra av fysikens hjälpföreställningar till ingredienser i ett något gottköpsartat religionssurrogat. Detta förhindrar dock ej att boken på det hela taget utgör en saklig och vederhäftig och samtidigt lättläst framställning av ett intressant och svårtillgängligt forskningsområde. Dess förträffliga illustrationer och på det hela taget utmärkta utstyrsel skall även nämnas.

O. Klein.

C. G. Darwin, *De nya materiebegreppen*, Albert Bonnier, Stockholm 1934, 192 sid., kr. 5:75.

De nya idéer, som brutit sig fram inom fysiken, ha på de senaste åren givit upphov till en rik populärlitteratur, särskilt i England. Många av dessa böcker ha kanske ett visst värde som skönlitteratur: de äro fängslande skrivna, fulla av författarens olika hugskott och försedda med många citat ur Alice in Wonderland. C. G. Darwins bok är inte av detta slag. Den är rent saklig

— men inte därför tråkig — och jag tror det är svårt att finna ett uttalande, som inte är så exakt som det är möjligt i en populär framställning.

Efter en allmän orientering över atomfysiken ger författaren en kort utredning av de olika vågfenomenen, alltid åskådligt illustrerade genom hänvisning till vågor på en vattenyta. De så erhållna satserna användas i det följande kapitlet, som visar hur studiet av de materiella kropparnas rörelser lett fram till vågmekaniken. Den skenbara motsättningen mellan våguppfattningen och korpuskeluppfattningen av såväl materien som ljuset diskuteras utförligt, och författaren påvisar, hur osäkerhetsrelationen löser svårigheterna, och hur man trots dualismen aldrig får någon motsägelse.

Vågmekanikens grundprinciper tillämpas sedan på speciella problem, först och främst på atomernas byggnad och sedan även på elektronspinet, Comptoneffekten, o. s. v. Framställningen avslutas med en redogörelse för Paulis princip.

Det är en mycket svår sak att ge en klar framställning av den nya fysiken utan att använda dess eget språk, matematiken. Darwin förutsätter inga förkunskaper varken i matematik eller fysik, och boken saknar fullständigt matematiska formler. Trots detta bör det även för en fysiker vara ett nöje att läsa boken till följd av den utmärkt klara översikt, som författaren ger av de nya materiebegreppen.

Översättningen är god, men borde även omfattat de engelska längdmåtten — och framför allt borde den utförts tre år tidigare. Med hänsyn till den moderna fysikens snabba utvecklingstakt är det snarast en lycklig tillfällighet, att boken inte redan är föråldrad.

Hannes Alfvén.

J. W. N. Sullivan, *Naturforskningens gränser.* Själsliv och materia i den nya forskningens ljus. Övers. av Hanna Diedrichs. Natur och kultur, Stockholm 1934, 237 sid., pris 6:—, inb. 7:75.

Den framstående engelske skriftställaren Sullivan ger i detta nya populärvetenskapliga arbete en framställning av moderna naturvetenskapliga tankar. Kapitelöverskrifter sådana som »Universum vidgas», »Materiens hemligheter», »Förnuftets vävnad», »Själens natur» visa, att författaren försökt ge en omfattande överblick över synnerligen vidsträckta områden; hans framställning berör såväl astronomi och atomfysik som modern själsforskning: behaviorism och psykoanalys. Av de senare blir särskilt behaviorismen utsatt för en stark kritik: »Det gives mycket i

andra människors uppförande, t. ex. då vi lyssna till ett samtal i politik, som inte tyder på att någon tankeverksamhet äger rum utan endast antyder automatiska reaktioner. Men man blir förvånad, när man hör behavioristen konstatera att han inte märker något tecken till tankeprocesser inom sitt eget jag.»

Boken framhåller, huru vår kunskap om naturprocesserna tack vare den nyaste fysikaliska forskningen visserligen ökats i hög grad, men likväl på sätt och vis blivit mindre tillfredsställande; vi mötas på varje område av oklarhet och motsägelser. Det mest revolutionerande för naturvetenskapligt tänkande har kanske varit »osäkerhetsprincipen» med dess förnekande av den stränga determinismen. Om urprocesserna i naturen icke förlöpa efter kausalbestämda lagar, om teoretikerna frestas att lägga »den fria viljan» till grund för de fysikaliska företeelserna, då blir naturvetenskapens universum mer mystiskt än det någonsin förut varit i tänkandets historia. Sullivan framhåller i bokens sista kapitel, »En blick mot framtiden», att fysikens förråd av begrepp måste berikas; han håller före att vetenskapen om själen en gång kommer att bli den viktigaste av alla vetenskaper och att dess begrepp komma att utsträckas till naturens hela område. De motsatser som synas bestå mellan själens, livets och materiens vetenskaper skola då förlora till och med skenet av verklighet.

Sullivans fängslande och intressanta bok ger en värdefull överblick över en del filosofiska synpunkter, som mer eller mindre tydligt framträda i den moderna naturvetenskapen. De spörsmål som behandlas äro ingalunda att räkna till de lättfattligaste, men tack vare den lediga och klara stilen kan läsaren utan större svårighet följa författarens tankegång. *Anna Beckman.*

Kosmos. Fysiska uppsatser. Bd. 12. Utgivna av Svenska Fysikersamfundet. P. A. Norstedt & Söner (i distribution), Stockholm 1935, 265 sid. I bokhandeln häft. kr. 10. Medlemskap, årsavg. kr. 10, medför rätt till ett bundet ex. Anmälan till prof. G. Borelius, Tekniska Högskolan, Stockholm.

Universitetens uppgift är tvåfaldig, att vara en härd för vetenskaplig forskning och en anstalt för högre undervisning. Som skicklig och omsorgsfull handledare av de unga studenterna och som insiktsfull censor vid studentexamina har laborator B. Beckman, som förra året avled, gjort en betydelsefull insats i svenskt kulturliv. Efter ungdomsårens vetenskapliga verksamhet kom Beckman att helt ägna sina krafter åt undervisningen. Hans framgångsrika strävan att ge de studerande en solid allmän kunskap

inom fysiken skall förvisso av hans lärjungar och fysikens målsmän ute i vårt land tacksamt erkännas. Lektor T. Wetterblad har för Kosmos skrivit minnesteckningen över den bortgångne.

Lektor Eva Ramstedt, som själv arbetat hos madame Curie, har givit en fängslande levnadsteckning av denna märkliga kvinna, vars hela liv varit ägnat den fysiska vetenskapen, och vars stilla, förnäma personlighet, man förstår har gjort ett sympatiskt intryck på dem med vilka hon kom i beröring. Genom utblickar över de forskningsområden, som makarna Curies upptäckter öppnat, vidgas framställningen till en historisk exposé över radiologiens utveckling fram till våra dagars sensationella framgångar på kärnfysikens område. En av de märkligaste bland dessa är Irène Curies och hennes makes upptäckt för ett år sedan, då de funno, att man kan framställa nya radioaktiva ämnen med en ny form av radioaktivitet. Om t. ex. bor beskjutes med α-partiklar, bildas en kväveisotop, radiokväve samtidigt med att en neutron emitteras. Radiokvävet faller sannolikt sönder under utsändandet av en positron och bildandet av en kolisotop. Halveringstiden för radiokvävet är 14 minuter.

Ljusets dispersion i gaser förklarades tillfredsställande av den gamla elektronteorien, som utgick från tanken, att en växelverkan förefinns mellan elektriska oscillatorer i atomerna och ljusvågen, som framgår genom det dispergerande mediet. Svårigheterna att på kvantumteoriens, nu som säker ansedda grund, bygga upp en ny dispersionsteori, ha så småningom övervunnits. Teoretikerna ha lyckats omtolka de klassiska formlernas symboler till att motsvara de nya kvantumbegreppen. Ett visst elektronslag enl. den gamla teorien motsvarar i den nya en viss övergång mellan stationära tillstånd, oscillatorns egenfrekvens motsvarar språngfrekvensen enl. Bohrs frekvensvillkor. Fil. dr S. Friberg skildrar, hur man med utomordentligt fina mätmetoder kan inträngа i områdena för anomal dispersion och där göra mätningar av brytningsindex. Just kring absorptionslinjerna, där mätningarna äro särskilt svåra att utföra, hämtas nämligen upplysning om oscillatorstyrkan, en storhet, som ingår i kvantumteoriens dispersionsformel.

I de vanliga mikroskopen kan man på grund av diffraktionen ej komma upp till en nyttig förstoring över 800 à 1.600. Vad som därutöver är, är tom förstoring, som ej ger något nytt utan blott försämrar bilden. Det synliga ljuset har alltför långa våglängder. Helt nya möjligheter att skapa större förstoringar har elektronvågoptiken givit oss. Fil. lic. S. v. Friesen har i en mycket trevligt skriven och innehållsrik uppsats om elektronmikroskopet givit

oss en översikt över de nya hjälpmedel till naturens utforskande som denna nya gren av fysiken erbjuder. Då den våglängd, som är koordinerad med en elektron av exempelvis hastigheten 1 500 elektronvolt, blott uppgår till 0,3 Å, eller en hundratusendel av synliga ljusets våglängd, har man härvid kommit till våglängder, som nå ned till, ja underskrida atomernas egna dimensioner; 12 000 gångers förstoring har redan uppnåtts. Mikroskopet består av kondensorlins, objektiv och projektionslins, som kastar bilden på en fluorescerande skärm. »Linserna» utgöras av magnetiska eller elektriska inhomogena fält, som utformas så, att elektronerna koncentreras eller spridas allt efter behov. Dessa fältlinser ha även den likheten med optiska linser, att de kunna vara behäftade med sfärisk och kromatisk (beroende på olika elektronhastigheter) avvikning och astigmatism. Förvånansvärt eleganta bilder erhållas. Användningen är mångsidig. Intet hindrar, att man bygger elektronkikare med vilka man från stratosfären skulle kunna studera emissionscentra på solen för därifrån emitterade katodstrålar. Måhända erbjudes här ett nytt instrument för universums utforskande.

Dr W. Holst redogör för framställningen av rent deuterium, den tunga väteisotopen, och för bandspektroskopiska undersökningar av metallhydrider och metalldeutrider.

Med ledning av linjernas lägen i bandspektra kan man räkna sig till energiförhållandena inom molekylerna, förhållandet mellan de ingående atomernas massor m. m. En jämförelse mellan spektra för två så likartade ämnen som AlH och AlD bör givetvis kunna ge en intressant inblick i atomernas värld. På masspektroskopisk väg är deuteriums atomvikt förut bestämd till 2,01363. Den ur bandspektroskopiska mätningar beräknade massan har ett något avvikande värde, som kan förklaras under speciella antaganden rörande tillståndet inom molekylen.

Docenten N. Ryde ger en mycket klar och upplysande framställning av de högre ädelgasernas normala spektra. Dessa visa en fullkomligt analog byggnad, under det att helium har ett spektrum, som till konstitutionen helt skiljer sig från övriga ädelgasers. Detta hänger naturligtvis samman med det förhållandet, att He har två elektroner, under det alla övriga ha 8 elektroner i yttersta skalet.

Föreståndaren för Radiumhemmets fysiska laboratorium, fil. dr R. Sievert redogör för behandlingsmetoderna vid Radiumhemmet och ger en historik över doseringstekniken, som först sedan den ställts på tillförlitlig fysikalisk grund, nått nödig exakthet. Han lämnar vidare en beskrivning över instrument och metoder för

intensitetsmätning av röntgen- och radiumstrålning. Särskilt betydelsefull är jonisationsmetoden, som i en elegant form användes vid Radiumhemmet. Jonisationskammaren är fullständigt skild från elektrometern. Endast vid uppladdningen av den lilla jonisationskammarens innerelektrod och efter bestrålningen, då kvarvarande laddning mätes, sättes den i förbindelse med elektrometern. Isolationen är så utomordentligt hög, att man per post kunnat sända laddade kammare till New York och åter och av den kvarvarande laddningens storlek bestämma intensiteten av den strålning för vilken kammaren i Amerika utsattes.

I närmast föregående band av Kosmos förekom en 47 sidor stark uppsats av dr G. Siljeholm om glödelektrisk emission från rena metallytor, och i år har samme författare bidragit med en uppsats på 51 sidor om emissionen från med främmande metallytor beklädda metallytor. Visserligen är ämnet betydelsefullt och förf. en kunnig fackman på området, men lämpligheten att så utförligt behandla ett ämne i årsboken två år å rad torde ändock kunna ifrågasättas.

En ur innehållets synpunkt förträfflig artikel om molekylstrålar har skrivits av dr R. Schnurmann. Språkliga fel av typen »kretsskiva» hade kunat undvikas, om en svensk sett igenom manuskriptet före tryckningen.

Genom ett litet hål i ett slutet rum får ett smalt strålknippe gasmolekyler utströmma i ett rum med högvakuum. Gastätheten inom en dylik molekylstråle är så liten, att ingen sammanstötning mellan molekylerna äger rum; molekylerna kunna betraktas som fria. De fria molekylernas egenskaper kunna således studeras. Mätmetoderna äro utomordentligt känsliga och molekylstrålemetodens användbarhet är mångsidig. Man har bl. a. bestämt atomers och molekylers magnetiska moment, ja t. o. m. protonens moment, som är direkt mätbart endast med denna metod. Man har även lyckats visa, att molekylstråleknippen av lätta molekyler kunna ge upphov till diffraktionsfenomen liksom elektronknippen. Tunga molekyler reflekteras däremot från en kristallyta enligt klassiska lagarna som bollar från en fast vägg. De av De Broglie fordrade vågegenskaperna hos neutrala korpuskler framträda således hos de lättaste molekylerna. Vi se bryggan lagd från materien över de lättaste molekylerna och elektronen till ljuset.

M. Sjöström.

Knut Lundmark, *Från kaos till kosmos.* Några drag ur den astronomiska världsbildens utvecklingshistoria. »Norstedts Lilla Bibliotek.» P. A. Norstedt & Söners förlag, 1934, 275 sid., häft. kr. 3:—, inb. kr. 3:75.

Prof. Lundmark har själv drivit ingående källstudier rörande astronomiens äldre historia. Därmed blir även framställningen i flera kapitel så medryckande, att läsaren i hög grad blir delaktig av samma spänning, iver och forskarglädje, som besjälat författaren under hans arbete. Man gripes av intresse rörande tillkomsthistorien av den vetenskapliga handbok, som hittills av alla haft den största livslängden, nämligen Almagest med sina 1400 år eller mera. Ja, det händer, att den kan rådfrågas än i dag, just på grund av dess höga ålder. Och har man fått Almegest, Hipparchos och Ptolemaios presenterade för sig av Knut Lundmark, blir man med nödvändighet intresserad av att veta i vad mån Ptolemaios stöder sig på Hipparchos, hur grundtexten en gång sett ut, och mera sådant, för vilket färdighet i arabiska är nödvändigt. Att man även borde kunna läsa kinesiska och tolka kilskrift framstår som ett klart önskemål, när man erfar, hur mycket som ännu är att hämta ur gamla texter.

Bland intresseväckande nyheter må nämnas kapitlet om det högst egendomliga Roger Baconmanuskriptet från 1200-talet, som dechiffrerats av Newbold och tyckes beskriva iakttagelser, som måste ha krävt tillgång till både mikroskop och kikare.

Boken är rikt illustrerad med bilder, som endast i undantagsfall återfinnas i andra svenska publikationer.

Den skolyngling, som får boken i premium, kommer med stor sannolikhet att även studera astronomi längre fram, och äldre läsare bli åtminstone varma vänner av samma vetenskap, om de icke varit det förut. Boken är likväl ingen lärobok i astronomi utan skildrar endast, som framgår av titeln, några drag ur vår världsbilds utvecklingshistoria. *John Tandberg.*

Carl Du Rietz, *Kort handbok i pH-bestämning och titrering jämte de lösningsteoretiska grunderna,* Tekniska Högskolans Studentkår, Kompendiekommittén, 1934.

Det är inte bara damhattar som bli moderna och omoderna, det är likadant med de vetenskapliga arbetsmetoderna. Vid sekelskiftet mätte man ledningsförmågan på alla lösningar man kom över, på 1920-talet mätte man deras pH. Även om detta senare ofta skett okritiskt och till överdrift, så att man kunnat tala om en »hydrogen ikon worship», har dock dessa mätningars popula-

ritet framtvingat en rationell behandling av lösningarnas termodynamik.

Det är ett sorgligt kapitel i kemiens historia, att de termodynamiska utredningar, som redan tidigt gjordes av Willard Gibbs och andra, först de allra senaste åren kommit till allmän praktisk användning. Oaktat Gibbs' arbete redan 1892 översattes till tyska av Ostwald, fortfor man — särskilt läroboksförfattarna — att blott intressera sig för de Heliga Ideala Gaserna och Lösningarna, — att den verkliga, oss omgivande materien följde helt andra lagar förbigicks liksom med victorianskt pryderi. Undantagen äro få, såsom Dolezaleks utredning av blyackumulatorns termodynamik. Den mer empiriska forskningen, som G. N. Lewis och Niels Bjerrum representera, tillvann sig föga intresse, innan Debye och Hückel lyckats göra en teori över elektrolyternas påfallande aktivitetsförhållanden. Men bara man fått en teori, som står tryckt i en bok, ville alla göra mätningar sedan.

Men även sedan forskarna allmänt accepterat skillnaden mellan aktivitet och koncentration, har denna endast med svårighet trängt in i undervisningen, vilket nogsamt synes i läroböckerna — Lewis och Randall är det lysande undantaget. Du Rietz har känt detta tryck och anser sig i sitt förord behöva särskilt påpeka, att man är helt enkelt tvungen att använda aktivitetsbegreppet, om man vill meddela eleven materiens termodynamiska egenskaper. — Recensenten har själv en gång hört en akademisk lärare säga: »Aktivitet? — ser du det är något som man använder när man inte riktigt vet, hur det hela hänger ihop!».

Förf. har en annan inställning. Inom kompendiets trånga ram ger han en fullt modern, koncentrerad, men klar och rikhaltig översikt över de områden som bokens titel anger. Han skriver själv i förordet:

»I första hand syftar nu föreliggande arbete att vara till hjälp vid kursen i kvantitativ analys vid Kungl. Tekniska Högskolans kemiavdelning, och därmed sammanhänger även, att det kommit att läggas fram i den mindre anspråksfulla kompendieformen. Men då vi hittills saknat någon sammanfattande svensk framställning på detta område, och även de utländska antingen varit mycket stora och dyrbara eller också allt för reklammässigt upplagda, hoppas förf., att det därjämte skall kunna vinna spridning dels på olika håll ute i industrien, dels även bland andra för dessa frågor intresserade, mera vetenskapligt samt biologiskt orienterade kretsar.»

Boken berör sålunda icke den elementära undervisningen, men

åtskilliga av denna tidskrifts läsare torde dock vara intresserade av den.

Efter en inledning, där de i arbetet använda storheterna definieras, redogör förf. för neutralisationskurvor vid reaktionen mellan olika syror och baser, buffertlösningar och indikatorer, samt dessas användning vid kolorimetriska pH-bestämningar och syra-bas-titreringar. Därefter redogöres för elektrometriska metoder — vätgaselektrod, kinhydronelektrod o. dyl. Även den katalytiska metoden behandlas. — Förf. har åtskilligt att säga om bestämningarnas utförande samt om deras användning på olika områden. Därefter följer en översikt över förhållandena i icke-vatten-lösningar, där förf. utgår från Brønsteds syra-bas-uppfattning. Slutligen finnes ett utförligt kapitel om titreringar, där allehanda titreringsreaktioner, såsom fällningar, komplexbildningar m. m. behandlas, ävenså ekvivalentpunktens bestämning på potentiometrisk väg eller genom ledningsförmåga. Därefter följer en litteraturöversikt, där varje bok får en kort karakteristik, varigenom den som vill sätta sig närmare in i någon av dessa frågor kan få ledning vid anskaffandet av utförligare verk, så en arbetsplan för övningslaboratorium samt tabeller.

Rec. rekommenderar boken på det livligaste, han har icke några viktiga anmärkningar att göra mot någon punkt i den. Det skulle i så fall vara att han gärna hade sett neutralisationskurvorna uppritade även logaritmiskt, enligt Bjerrums föredöme. De bliva då räta linjer och med kännedom om de närvarande ämnenas dissociationskonstanter och ungefärliga mängder kan man på fri hand göra en liten ritning, ur vilken utläses vid vilka pH buffertkapaciteten blir minimum — dit skall man titrera lösningen.

Ett par småsaker må rättas: sid. 7 rad 13 skall ordet isochor utgå. — Då förf. lyckligtvis använder buffert i st. f. det tyska puffer, hade man också gärna velat slippa stränga violettfiltra (sid. 32) och villkorlighet i st. f. godtycklighet (sid. 43). — Värdet 7,97 för hydroxylaminets pK_b (Tab. I) är icke beräknat med hänsyn tagen till aktiviteterna, som Landolt-Börnstein, varifrån siffran tydligen är hämtad, felaktigt uppger. *Arne Ölander.*

Moll-Rudberg, *Lärobok i fysik.* I. Statik. 10:e uppl., omarbetad av Ture Rudberg och Erik Rudberg. Svenska bokförlaget, Stockholm 1934, 95 sid., kr. 2: —.

De nya tim- och kursplanerna för realgymnasiet ha nödvändiggjort en begränsning av lärostoffet, vilken i stor utsträckning drabbat den kurs i allmän fysik (statik), som genomgås i första

ringen. Detaljerade anvisningar rörande de moment, som böra vid undervisningen behandlas, ha lämnats i av Skolöverstyrelsen utfärdat cirkulär. De inskränkningar, som den nya läroverksreformen medfört för matematiken i realskolan, ha därjämte mera än förut aktualiserat betydelsen av att i första ringen gå mycket varsamt till väga med den matematiska förkunskaper krävande *deduktiva* framställningen av de fysikaliska lagarna. »Läraren bör noga aktgiva på att abstraktionerna icke komma för tidigt, innan ännu ett tillräckligt mått av erfarenhetskunskap blivit av lärjungarna inhämtat samt deras tankeförmåga förvärvat den behövliga graden av mogenhet», heter det i 1909 års metodiska anvisningar, och intet har sedan dess inträffat, som gör det sannolikt, att de inom kort utkommande nya anvisningarna skulle på denna punkt ha undergått någon revidering. I icke ringa mån bör det ankomma på vederbörande läroboksförfattare att tillse, att innehållet och dess metodiska utformande stå i överensstämmelse med utfärdade anvisningar och detta icke minst av den anledningen, att lärarna i regel hellre låta läroboken än de metodiska anvisningarna utgöra rättesnöret för undervisningen.

Jag är icke ensam om att ha gripits av en viss förvåning inför den utformning, som författarna givit åt föreliggande 10:e upplaga av Molls välkända »statik». Man kunde med fog ha väntat en större anpassning efter ovannämnda förhållanden. Men härav har tyvärr blivit intet. Bortsett från några obetydliga inskränkningar har hela den gamla kursen bibehållits och därjämte ha inom hydrostatiken sådana tillägg av teoretisk-matematisk natur gjorts, att om läroboken slaviskt skall följas — vilket med stor sannolikhet på många håll av redan omnämnda skäl kommer att ske — det är fara värt, att såväl lärare som elever så småningom gripas av missmod, för att icke säga förtvivlan. De nytillfogade härledningarna för Pascals princip, vätsketrycket som punktfunktion och Arkimedes princip äro vetenskapligt sett utmärkta och synnerligen läsvärda för *läraren,* men det finnes enligt min åsikt ingen rimlig möjlighet att få en elev i första ringen med så gott som all avsaknad av förmåga till abstrakt tänkande att begripa denna lärda framställning; ja, jag skulle icke ens våga försöka med elever i högsta ringen med utsikt till större framgång. Anledningen till att författarna lockats till dessa teoretiska »excesser» (förlåt uttrycket!) torde väl, om jag inte misstager mig, ha varit en av lektor Lundblad framförd, välmotiverad kritik av föregående upplagors framställning av vätsketrycket, men det synes mig, som om författarna tillgripit radikalare åtgärder än som varit nödvändiga. Vida lyckligare hade varit, om författarna

nöjt sig med att bringa klarhet i fråga om begreppen »tryckkraft» och »tryck» men för övrigt *i stort sett* bibehållit det tidigare behandlingssättet. (Det skulle föra för långt, om jag inginge på kritik även av detta, trots att anledningar icke saknas.)

Författarna ha i föreliggande upplaga behandlat geostatiken före hydrostatiken. Från deras synpunkt sett kan det ha tett sig önskvärt; så som hydrostatiken utformats, synes en närmare förtrogenhet med läran om krafter och deras jämvikt vara nödvändig. Den, som icke accepterar författarnas framställning av hydrostatiken, torde icke ha anledning att utan vidare godtaga denna omkastning i tidigare gällande ordningsföljd. Även om i realskolan det — åtminstone enligt min åsikt — är önskvärt, att kraft- och jämviktsbegrepp utredas, innan läran om vätskorna genomgås, behöver detta icke gälla på gymnasiet. Där bör hydrostatiken huvudsakligen bygga på experimentella erfarenheter men geostatiken dessutom kräva den något större förtrogenhet med ett teoretiskt och geometriskt åskådningssätt, som för eleverna är lättare att följa längre fram än i början av första ringen.

Det har förvånat mig, att kap. 20 (lufttryck och väderlek) bibehållits, då ju uttryckligen i anvisningar från Skolöverstyrelsen framhållits, att i statiken alla meteorologiska element böra utgå. Det naturliga är väl, att meteorologien *i ett sammanhang* upptages i värmeläran. Även vissa andra moment kunde saklöst ha utgått, så t. ex. §§ 40—44 (skruven, blocket, kilen), §§ 71—75 (ytspänning, kapillaritet), §§ 78—83 (lufttryckets historik) samt §§ 103—105 (molekylarteorien). Molekylarteorien hör bättre hemma i värmeläran. Däremot saknas en kortare — lämpligen med fin stil tryckt — framställning av den i nutida fysik så viktiga läran om vätskors och gasers motstånd. I Skolöverstyrelsens anvisningar förutsättes i varje fall den möjligheten, att någon timme kan ägnas häråt.

I metodiska frågor står jag i många fall — utom här nämnda — på annan ståndpunkt än den, som läroboken förfäktar. Det skulle föra för långt och säkerligen vara föga fruktbart, om jag inginge på detaljer. Blott en fråga — av mera principiell innebörd — vill jag i korthet beröra. Vid avfattningen av hävstångslagen, lagen för kommunicerande kärl och Boyles lag ha författarna onödigt framhållit den omvända proportionaliteten. Är det inte — rent fysikaliskt sett — naturligare att endast skriva lagarna under produktform? Huru skall man exempelvis kunna tala om omvänd proportionalitet, då ett U-rör innehåller mer än två vätskor?

Mycket kunde vara att tillägga, bl. a. ifråga om övningsexemplen, av vilka somliga i avfattningen icke förete önskvärd klarhet, men

det sagda må vara nog. Mitt slutomdöme om föreliggande upplaga av statiken måste bli, att den *vetenskapligt* sett är *bättre* än sina föregångare, men som *lärobok för realgymnasiets första ring* betraktad *sämre*. Mina vänner författarna få förlåta, att jag inte kan yttra mig fördelaktigare. Bakom mig stå många likatänkande. För egen del kommer jag vid min undervisning att i huvudsak följa den näst sista upplagans framställning, dock med beskärning av lärostoffet till ungefär hälften av lärobokens.

Torsten Wetterblad.

Moll-Rudberg, *Lärobok i fysik.* V. Dynamik. 9:e uppl., omarbetad av Ture Rudberg och Erik Rudberg. Svenska bokförlaget, Stockholm 1934, 78 sid., kr. 1: 95.

Förändringarna i denna del äro färre än i del I. Främst må annoteras, att kapitlet om sammansättning av rörelser undergått en genomgripande omarbetning. Att en dylik varit önskvärd, är otvivelaktigt, dock synes mig den gjorda — enligt nyvunnen erfarenhet — ha blivit för svår för eleverna. Icke alltid präglas den nya framställningen av önskvärd klarhet. Det kan, pedagogiskt sett, icke anses vara riktigt att — såsom skett i § 72 (sid. 41, 3:e raden uppifrån) — nöja sig med påpekandet: *»med likformiga trianglar* finner man lätt, att tillväxten varit likformig». Eleverna vilja absolut ha klarhet i vilka trianglar det gäller, och detta så mycket hellre som denna likformighet just är det fundamentala i bevisföringen. Varför skall inte läroboken på denna punkt ge ordentligt besked, när den samtidigt gör sig det icke fullt så nödvändiga besväret att genom ett stort antal figurer åskådliggöra lägen och hastigheter i förhållande till olika koordinatsystem?

I den nya upplagan har centralrörelsen satts före läran om jämviktsvillkor. Jag är nog gammalmodig att anse den föreg. upplagan ha förfarit riktigare, som gjort tvärtom. Placeringsfrågan torde möjligen sammanhänga med metodiken för centralrörelsen. Läroboken har alltid varit rädd för »centrifugalkraften». Nästan ängsligt har den med fin stil påpekat, att dynamiska problem, innehållande centralkrafter, kunna överföras till statiska, om man ersätter centri*petal*kraften med centri*fugal*kraft. Vid behandling av den koniska pendeln har läroboken konsekvent skytt den sistnämnda. Och dock är det väl så, att alla problem på centralrörelse bli — framförallt från elevernas ståndpunkt sett — så mycket enklare, om man inför begreppet »tröghetskraft». Har man lyckligt och väl slutbehandlat läran om jämviktsvillkoren,

är det så lätt att med utgångspunkt från det konkreta och för eleverna lättbegripliga exemplet »pendeln i en järnvägsvagn» få dem att förstå tröghetskraftens roll i problem av dynamisk natur. Min erfarenhet från undervisningen på ifrågavarande område är under alla förhållanden, att införandet av centrifugalkraften är till båtnad.

Olika uppfattningar råda som bekant rörande den mest rationella skolbehandlingen av enheten för kraft. Trots all från olika håll framförd kritik anser jag lärobokens system med »fast» enhet vara pedagogiskt riktigast. I denna sista upplaga ha emellertid författaren som enhet valt den kraft, som ger massan 1 kg en acceleration av 9,80665 m/sek², då däremot den officiella formelsamlingen nöjt sig med värdet 9,81. Det hade för undvikande av komplikationer varit lyckligare, om läroboken — möjligen med påpekande i förbigående av det noggranna värdet — stannat vid det i formelsamlingen angivna. Visserligen utsäges i ett tillfogat löst blad att närmevärdet 9,81 är tillfyllest för vissa specificerade formler och 1 gramkraft har satts lika med 981 dyn, men frågan är, om icke läroboken trots detta har i onödan trasslat till det hela. Det är inte så lätt för eleverna att klara de tre konstanterna 9,8 (uppgiven approximation i flertalet exempel), 9,81 och 9,80665, när det gäller den s. k. kraftekvationens numeriska tillämpningar. Jag har många gånger mottagit skrivböcker, i vilka vederbörande elev sagt, att massan 1 kg har tyngden $\frac{9{,}8}{9{,}81}$, då accelerationen 9,8 i problemet uppgivits, och väntar nu, sedan den sista upplagan kommit i bruk, motsvarande korrektion $\frac{9{,}81}{9{,}80665}$, om värdet 9,81 uppgivits. Ingalunda kan man tacka författarna för att ha infört klarhet och reda i denna redan förut besvärliga fråga. För egen del har jag vid undervisningen infört följande principer: 1) Formelsamlingens värde 9,81 såsom konstant i M. K. S.-systemet följes; 2) 1 gramkraft = 981 dyn; 3) Endast undantagsvis uppgivas exempelvis värdena 9,80 eller 9,82 och då endast, om en avvikelse från värdet 9,81 kan anses vara påkallad (exempelvis i pendelproblem, eller då jag velat övertyga mig om att eleverna förstått sambandet mellan de bägge måttsystemen); 4) Värdet 9,8 begagnas aldrig. Ofta förekomma naturligtvis problem, då värdet 9,81 kan synas vara onödigt noggrant. Jag har emellertid då ansett det förståndigast, att vederbörlig avkortning sker i slutresultatet. (I förbigående sagt och såsom ytterligare ett argument *för* min princip att som regel använda värdet 9,81 må nämnas, att ännu ingen opposition avhörts mot att som värde på mekaniska

värmeekvivalenten begagna talet 427, trots att i problem av denna art noggrannhetsgraden hos resultatet snarare är mindre än större än hos dynamiska problem.) Någon rädsla för att genom ovan framlagda principer ha ställt mina elever i en mindre gynnsam position gent emot studentskrivningen, hyser jag icke. Då i formelsamlingen det heter, att tyngdkraftens acceleration är 9,81 m/sek², »för så vitt annat värde än här angivna icke lämnats i problemet» torde risken för att det ifråga om tillämpningar på kraftekvationen mest farliga värdet 9,8 skall ifrågakomma, icke vara så stor.

Man hade kunnat vänta, att i denna nya upplaga slippa se rubriken »*levande kraft*-principen». Fysiklärarna borde väl vara ense om att söka utrota sådana missvisande och ofysikaliska uttryck som levande kraft, kraftöverföring etc. Vidare hade det varit till fördel, om författarna underkastat kap. 11 (himlakropparnas rörelser; allm. gravitationen) en välbehövlig revidering. För tillkomsten av en kort framställning av gyroskopets teori framföres ett tack. — Kapitel 6 (fysikens enheter) har förbättrats.

Även i del V finnes utöver det redan sagda mycket av metodiskt intresse, som väl varit värt att behandlas. Tidskriftens utrymme är emellertid begränsat, och jag har sett mig nödsakad att i stort sett uppehålla mig endast vid frågor av mer principiell innebörd.

Torsten Wetterblad.

A. Thorup, *Praktisk Fysik med Fysiksløjd for Folkeskolen.* I. Magnetisme og Elektricitet, 51 sid.; *Fysiksløjd.* II. Vandkraft og Vindkraft, 76 sid. Gyldendal. København 1934. Varje del kr. 4:25.

Det har på senare tider allt tydligare framträtt en strävan att låta skolans olika ämnen inbördes stödja varandra. På så sätt skulle, menar man, isolationen emellan dem i någon mån hävas och mångläseriets splittrande inverkan neutraliseras. Av många skäl falla dessa missförhållanden starkast i ögonen i folkskolan. Det är därför naturligt, att just denna skolform gått i spetsen, när det gällt frågan om deras avhjälpande. Man behöver bara tänka på det enande och sammanhållande band de skilda ämnena emellan, som heter hembygdskunskap. På så sätt har ock den s. k. fysikslöjden växt upp och utan tvivel varit till båtnad både för slöjden och för undervisningen i naturkunnighet. Om en elev själv fått förfärdiga en fysikalisk apparat, så är det alldeles uppenbart, att han därmed också skaffat sig bättre förutsättningar än förut att förstå de fysikaliska lagbundenheter, som denna apparat var

avsedd att åskådliggöra. Det är därför med intresse man tar del av ovan citerade litteratur, helst som den i ämnet förut befintliga ingalunda kan kallas rikhaltig.[1] Lektorn vid Horsens Statsskole A. Thorup är en på området erfaren man, som under årtionden arbetat för fysikslöjdens utbredande. I den första av de båda ovan nämnda böckerna skildras, hur man av ytterligt enkelt och billigt material kan framställa en mängd apparater för studiet av magnetismen och den strömmande elektriciteten. Boken är avsedd för »de øverste Klasser i Folkeskolen og for Ungdomsskoler, Fortsættelsesskoler o. fl., hvor man sikkert naar bedre fysisk Forstaaelse ved at gennemarbejde et eller to Afsnit noget grundigere end ved at vælge smaa Udpluk fra hele Fysikkens Omraade». Det måste sägas, att den lärjunge, som genomgått experimenten och själv förfärdigat åtminstone en del av apparaterna, nått en fast, på självsyn grundad och till omfånget ingalunda föraktlig kunskap om magnetiska och elektriska företeelser. Både apparaterna och försöken med dem äro så klart och utförligt beskrivna, att det inte bör vålla lärjungarna några svårigheter att arbeta helt och hållet på egen hand, om så skulle erfordras. Ett par saker har jag noterat vid genomläsningen. I en fig., som visar en växelströmstransformator (sid. 48) är lågspänningsspolen ritad med 7 synliga varv, medan högspänningsspolen endast fått 5, något som åtminstone ur psykologisk synpunkt icke är lämpligt, även om det riktiga förhållandet mellan varvantalen finnes angivet i texten. Det är väl också en smula överdrift, när det på tal om denna transformator säges (sid. 49): »Paa den Maade kan Strømmen fra de store Elektricitetsværker sendes paa stor Afstand uden at tabe i Kraft, tabe i Energi». Denna sammanblandning av beteckningar för kraft och energi möter man någon gång i boken och torde väl i betraktande av sin rikliga förekomst i — om uttrycket i detta sammanhang tillåtes — även de bästa familjer vara att betrakta som fullkomligt outrotlig.

Boken »Fysiksløjd. II» har en mera speciell karaktär. Innehållet utgöres av en utförlig beskrivning av en mängd apparater för utnyttjande av vattnets och vindens energi. Förf. har i sin framställning valt att följa en historisk gång »idet de forskellige Typer af Vandkraftmaskiner og Vindmotorer er behandlet i

[1] Låt mig, om det kan vara någon till gagn, nämna ytterligare några arbeten, som behandla fysikslöjden:
Oskar Frey, Wellpapparbeiten. Verlag von Ernst Wunderlich, Leipzig.
Hj. Nilsson och G. H. Gustafson, Fysik och slöjd. Norstedt & Söners förlag, Stockholm.
Jon S. Kåsa, Håndbok i fysiksløid. Olaf Norlis forlag, Oslo.
A. Thorup, Fysik og Sløjd. I Strømelektricitet. Gyldendal, København.

den kronologiske Rækkefølge, hvori Opfindelserne fremkommer». Boken är framför allt avsedd för lärare och seminarieelever men kan också med fördel sättas i händerna på sådana lärjungar i folkskolans högre klasser och läroverken, som ha intresse för fysikens praktiska tillämpningar.

Hur önskvärt bedrivandet av fysikslöjden som ett värdefullt led i undervisningen än är, så sätter likväl tiden sina snäva — i läroverken mycket snäva — gränser härför. Till någon överdrift i fråga om programmets kvantitet gör sig emellertid Thorup icke skyldig. Hans apparater äro som sig bör enkla och avsedda att åskådliggöra elementära naturlagar. *Ernst Sedström.*

T. Wetterblad, *Fysikaliska laborationsuppgifter för realskolan,* P. A. Norstedt & Söner, Skolmateriellavdelningen (utgör häftet 9 i serien: Meddelande om fysikmateriell) 1934, 32 sid., 1 krona.

Som namnet anger, upptar föreliggande häfte en samling av laborationsuppgifter i fysik, lämpliga för realskolans stadium. Uppgifterna omfatta hela realskolans kurs, om man undantar meteorologien och astronomien. I regel torde man icke, med det ringa antal laborationstimmar, som nu står till buds, kunna medhinna alla uppgifterna, men varje lärare har ju då tillfälle att utvälja dem, han tycker bäst om, eller dem som bäst svara mot hans skolas instrumentella resurser. Uppgifterna synas vara synnerligen väl valda; ett par ligga möjligen i överkanten för genomsnittselevernas fattningsgåva på detta åldersstadium. Författaren visar sig behärska konsten att i få ord säga mycket. Redogörelserna äro tillräckligt utförliga för att göra klart för den med ämnet förtrogne läraren, vad försöken gå ut på, men icke så detaljerade, att de binda honom i fråga om sättet att utföra dem. Häftet avslutas med en prisförteckning över däri omnämnd materiel. *A. Frendel.*

Nyström-Olson, *Kortfattad funktionslära och analytisk geometri för realgymnasiet.* Svenska Bokförlaget, Sthlm 1933, 80 sid., häft. kr. 1:85.

Denna lärobok utgör ett sammandrag av författarnas tidigare, större lärobok, »Funktionslära och analytisk geometri», och omfattar de delar av densamma, som äro föreskrivna av 1933 års undervisningsplan.

Därigenom att förf. ändrat texten i minsta möjliga mån och vid övningsexemplen särskilt angivit deras nummer från den tidigare

upplagan, kunna de båda böckerna utan olägenhet användas samtidigt, vilket är till båtnad för de elever, som tilläventyrs redan äga den större boken. I ett nytt och kort kapitel (på 2 sidor) om »Geometriska orter, Andragrads kurvor» kunna eleverna få någon uppfattning om vad som menas med en ellips, hyperbel och parabel, oaktat studiet av dessa kurvor numera ej ingår i kursen.

Läroboken är i sin förra upplaga alltför välkänd, för att jag skulle behöva inlåta mig på en utförligare recension och framhålla dess många goda sidor. Det må dock tillåtas mig att få komma med ett litet önskemål för nästa upplaga av boken.

Av fig. 6, där punkten P i första kvadranten har koord. x, y, härleda förf. den generella formeln för den räta linjens vinkelkoeff., $tg\, v = \frac{y-l}{x}$. Det skulle här behövas en ingående förklaring, varför denna formel även gäller för de andra kvadranterna. Tydligen är det författarnas mening, att ex. 40 skall klarlägga förhållandet. Men dels är exemplet något oklart formulerat, så att man kan förutsätta, att ingen av lärjungarna skall på egen hand kunna reda upp det, varför övningsexemplet såsom sådant är olämpligt, och dels är saken av sådan fundamental betydelse, att den borde ha fått en utförligare behandling. *Algot Jenvall.*

Gradualavhandlingar.[1]

Edmund Schjånberg, *Die Verbrennungswärmen einiger chlorsubstituierter Fettsäuren und Ester.* (Beiträge zur Kenntnis des Zusammenhanges zwischen chemischer Konstitution, Verbrennungswärme und Molekularrefraktion.) Lund 1934, 132 sid. Disp. i Lund den 9 maj 1934. Opponenter: docent Erik Larsson och amanuens Esbjörn Eftring.

Avhandlingen utgör den första större systematiska undersökningen över klorsubstituerade föreningars förbränningsvärmen, bestämda i platinabomb med hjälp av den av prof. L. Smith och författaren utexperimenterade s. k. kvartsullmetoden. De undersökta föreningarna äro de monoklorsubstituerade ättik-, propion- och smörsyrorna, di- och triklorättiksyrorna samt de fyra lägsta normala och de tre lägsta iso-estrarna av dessa syror. Dessutom hava motsvarande icke klorsubstituerade föreningar jämte mono- och trikloracetamid undersökts.

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

Parallellt med den termokemiska undersökningen har även en refraktometrisk, dock ej fullständig sådan, företagits. Den använda refraktometern är Pulfrichs stora.

Bestämningen av förbränningsvärmen för isomera klorhaltiga substanser fordra en relativt stor noggrannhet i den kalorimetriska mätningen. De metoder, som använts för uppnående av denna noggrannhet, beskrivas i en särskild avdelning, i vilken också beskrivas några förbränningsförsök med en bomb invändigt klädd med silver-silverbromid enligt Roth.

Av avhandlingen framgår, att de normala estrarna hava andra förbränningsvärmen, andra molrefraktioner och moldispersioner än iso-estrarna. Detta gäller såväl för de klor- som för de osubstituerade estrarna.

Med hjälp av förbränningsvärmet beräknas spaltningsenergien och den s. k. Swietoslawskiska termokemiska konstanten för (C—Cl)-bildningen. Ett konstitutivt inflytande påvisas. Spaltningsenergien har sitt största värde, då kloren sitter i α-ställning och sitt minsta, då kloren sitter i γ-ställning till karboxylgruppen. Vid den termokemiska konstanten är naturligtvis förhållandet det omvända. Då hava vi det minsta värdet, när kloren sitter i α-ställning. De β-klorsubstituerade föreningarna intaga i båda fallen en mellanställning.

Förbränningsvärmet för varje nytillförd CH_2-grupp inom de homologa serierna beräknas, varvid det framgår, att detta förbränningsvärme minskas, ju högre upp man kommer i serierna. Detta konstitutiva inflytande påvisas också i spaltningsenergien och den termokemiska konstanten. Man erhåller en gång i dessa värden, en gång som dock blir mindre, ju högre upp man kommer i den homologa serien och ju längre bort kloren sitter från karboxylgruppen. I serien monoklorättiksyra, α-klorpropionsyra och α-klorsmörsyra stiger spaltningsenergien och faller den termokemiska konstanten.

Föreningarnas fysikaliska tillstånd är av betydelse vid behandlingen av sambandet mellan konstitution och förbränningsvärme. Den ändamålsenligaste jämförelsetemperaturen diskuteras ingående.

I det stora hela förhålla sig klorens refraktometriska konstanter ((C—Cl)-bindningens bindningsrefraktion och bindningsdispersion) liksom dess termokemiska. En tydlig differens föreligger mellan de α- och β-klorsubstituerade föreningarna, en mindre sådan mellan de β- och γ-klorsubstituerade.

Det enda användbara bombmaterialet vid förbränning av klorhaltiga föreningar torde enligt undersökningen vara platina eller

guld. Den Rothska silver-silverbromidbomben är fullkomligt oduglig vid arbete med klorhaltiga substanser.

Analyserna, förbränningsvärmena och alla de andra bestämda fysikaliska konstanterna äro sammanställda i tabellform.

Nils Ryde, *Zur Kenntnis des Einflusses elektrischer Felder auf die Lichtemission der Edelgasatome.* Lund 1934, 4:o, 112 sid., 18 pl. Disp. i Lund den 16 maj 1934. Opponenter: doc. O. Lundquist, fil. mag. F. Norling.

I första kap. ges en kortfattad redogörelse för uppkomsten och tydningen av atomspektra i allmänhet och speciellt av ädelgasernas spektra. Andra kap. innehåller en jämförande framställning av de viktigaste experimentella metoderna för undersökning av det elektriska fältets inverkan på atomspektra (Starkeffekt) samt grunddragen av de resultat, vartill tidigare undersökningar lett. Det elektriska fältet förorsakar framförallt en förskjutning och uppspaltning av spektrallinjerna. I kap. III redogöres för de experimentella anordningarna och den använda metodiken. Experimenten ha utförts enl. den s. k. »Lo Surdo-principen», vilken går ut på att utnyttja de starka elektriska fält, som uppträda i första katodskiktet vid en glimurladdning i en förtunnad gas, då en hög spänning — vid försöken 6 000—20 000 volt — anlägges mellan anod och katod. Det använda urladdningsröret, som var blåst av kvarts, var av helt ny konstruktion. En kritisk granskning av tidigare kända rörtyper, av felkällorna och av möjligheterna att eliminera dessa gives. Urladdningsröret konstruerades så, att betingelserna för erhållande av en lämplig urladdningsform voro uppfyllda, varvid samtidigt möjligast stark ljusintensitet och möjligast störningsfri urladdning eftersträvades. I kap. IV redogöres för resultaten av de experimentella undersökningarna vid neon, argon, krypton och xenon. Medan för argon och krypton inga tidigare mätningar finnas, voro sådana utförda för neon och (under försökens gång) för xenon. Vid de båda sistnämnda elementen ha de tidigare arbetena väsentligt utvidgats såväl genom bestämning av förskjutningarnas storlek vid ett flertal olika fältstyrkor som genom undersökning av ett avsevärt större antal spektrallinjer. Därigenom ha vid ett stort antal termer termvärdets beroende av fältstyrkan kunnat bestämmas. I samband med beskrivningen av resultaten äro dessa utförligt diskuterade. Därvid ha studerats storleken och förtecknet för termförskjutningarna och deras förändringar i de olika termserierna; uppspaltningen av spektrallinjerna i polariserade komponenter samt

termuppspaltningarna; intensitetsanomalier; uppkomsten av kombinationslinjer d. v. s. linjer, som endast under det elektriska fältets inverkan kunna frambringas, etc. Förhållandena vid ädelgaserna äro utomordentligt komplicerade, och trots att de olika ädelgaserna ha en fullständigt analog byggnad, så är det elektriska fältets inverkan på dem helt olika; varje spektrum visar en karakteristisk effekt. Benägenheten till uppkomst av kombinationslinjer är vid neon synnerligen starkt utpräglad, medan vid argon praktiskt taget inga sådana linjer iakttagits. Krypton och xenon intaga i detta hänseende en mellanställning. Vid neon kan effekten av det elektriska fältet sägas vara tämligen regelbunden, medan vid de högre ädelgaserna detta ej är fallet. Även beträffande termernas uppspaltning under det elektriska fältets inverkan visa de olika ädelgaserna stora olikheter. Antalet deltermer, som kunnat bestämmas, är vid de högre leden i ädelgasserien större än vid neon, och i allmänhet visar det sig, om man jämför de homologa termerna, att de ej giva samma antal deltermer. Ett anmärkningsvärt fenomen består däri, att vissa termer vid låga fältstyrkor förskjutas i en viss riktning och vid en viss fältstyrka nå ett förskjutningsmaximum, för att därpå vid ytterligare ökad fältstyrka förskjutas i motsatt led. Dylika »vändande termer» ha iakttagits vid argon och krypton, men i synnerhet vid xenon förekomma de i stor utsträckning. — I sista kap. äro en del av resultaten teoretiskt interpreterade. Därvid visas, hurusom en tidigare framställd, på kvantummekaniska föreställningar grundad teori, som fört till uppfattningen att de av fältet förorsakade termförskjutningarna betingas av en repulsion mellan termerna inbördes, förmår giva en kvalitativ förklaring till en hel del av de iakttagna fenomenen, särsk. till förhållandena vid de »vändande termerna» och till uppkomsten av vissa symmetriska linjegrupper. Av det föreliggande materialet framgår, att en allmän, för den elektriska effekten grundläggande lag (»lagen om de överensstämmande effekterna»), som uppställts av J. Stark, i sin ursprungliga form ej är giltig. En modifierad formulering av lagen anges.

Karl Sjögren, *Experimentelle Untersuchungen des Starkeffekts bei Wasserstoff und Helium.* Lund 1934, 90 sid., 4 pl. Disp. i Lund 28 maj 1934. Opponenter: docent Osvald Lundquist och amanuens Börje Kullenberg.

Om en atom, som emitterar ljus, befinner sig i ett elektriskt fält, påverkar detta ljusemissionen, vilket visar sig i en uppdelning eller förskjutning av spektrallinjerna. Denna effekt (efter

upptäckaren benämnd Starkeffekten) iakttogs första gången på vätets Balmerserie och omedelbart därefter i heliums seriespektrum. Varje Balmerlinje uppspaltas av det elektriska fältet i ett med linjens serienummer växande antal linearpolariserade komponenter, vilka vid fältstyrkor mindre än 100 000 volt/cm äro symmetriskt belägna kring den ursprungliga linjen. Uppspaltningen växer proportionellt med fältstyrkan. Med hjälp av kvantateorien har man fullständigt förklarat vätelinjernas Starkeffekt. Endast på en punkt har det funnits en skiljaktighet mellan experiment och teori, nämligen beträffande proportionalitetsfaktorns storlek. Det teoretiskt beräknade värdet på denna var 6 % mindre än det av Stark experimentellt funna värdet. Denna avvikelse var visserligen liten men ingalunda oväsentlig, särskilt av den anledningen, att man vid Starkeffektundersökningar i regel använder sig av Balmerlinjernas uppspaltning för att bestämma den elektriska fältstyrkan.

I föreliggande avhandling lämnas en redogörelse för en undersökning, vilken gick ut på att göra en noggrann experimentell bestämning av den nämnda proportionalitetsfaktorn. För åstadkommandet av en ljusemission i ett elektriskt fält användes en modifierad form av den Starkska kanalstrålmetoden, vid vilken kanalstrålar få inträda i det smala rummet mellan två plana, parallella elektroder, mellan vilka en hög elektrisk spänning upprätthålles. Med den använda anordningen av fältelektroderna, varvid fältets riktning var vinkelrät mot kanalstrålarnas riktning, var det möjligt att bestämma avståndet mellan fältelektroderna (och alltså även fältstyrkan) med avsevärt större noggrannhet än den, Stark uppnått. Det emitterade ljuset analyserades med en spektrograf med stor dispersion. Bestämningarna utfördes vid 13 olika fältstyrkor mellan 60 000 volt/cm och 180 000 volt/cm. Det erhållna värdet avviker från det teoretiska med endast 0,6 %, d. v. s. teorien var riktig.

I avhandlingen redogöres vidare för en undersökning av Starkeffekten i helium. Starkeffektbilden i heliums spektrum har ett helt annat utseende än den i vätets, den är mycket mera komplicerad och oregelbunden. Endast en del av linjerna uppspaltas, somliga endast förskjutas. Effekten är i regel ej proportionell med fältstyrkan. Förf. har vid ett stort antal heliumlinjer mätt de av elektriska fält av olika fältstyrkor förorsakade uppspaltningarna och förskjutningarna. Mätningarna omfatta linjer inom våglängdsområdet 7070—2750 Å. De använda fältstyrkorna ligga mellan 44 000 volt/cm och 577 000 volt/cm. Resultaten av mätningarna äro sammanställda i tabeller och åskådliggjorda grafiskt.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgives av Svenska Kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. 46, 1934 (forts.). N:r 9 (sept.): K. Myrbäck, Om framställning ur jäst av en förening av ny typ. — Nyare undersökningar över halogenernas oxider (ref. av P. Nylén; intressant!). — N:r 10 (okt.): H. Erdtman, Phenolhydrierungen V. Notiz über die Dehydrierung von Trimethyl-phloroglucin. Die Struktur des »Cedrons». — H. Erdtman, Konstitution der Harzphenole und deren biogenetische Zusammenhänge. I. Ueber Pinoresinol. — N:r 11 (nov.): S. Hähnel, Kolorimetrisk bestämning av pH med Pulfrichfotometer. I. — N:r 12 (dec.): A. Westerlund, Kemiska företeelser vid uppsugningen i tarmen. — Biografiska notiser över avlidna medlemmar. — Referat och översikter. Meddelande från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XV, dubbelh. 3—4.

Ur innehållet. H. Peterson, Mätningar av ljusets hastighet. — Th. Wåhlin, Astrolabium planisphærium. — Y. Öhman, Om stjärnornas röda o. infraröda spektra. — B. Lindblad, Äga stjärnorna planetsystem? — K. Lundmark, Merkurius. — K. Lundmark, C. V. L. Charlier. — N. V. E. Nordenmark, Sällskapets nya planetarium.

Industritidningen Norden. Årg. 1934 h. 35—52, årg. 1935 h.1—9.

Ur innehållet. Olika färgpigments rostskyddsverkan. — Farliga skydds- o. rengöringsmedel. — Fotoelektriska celler o. deras användning. — Nya mätinstrument. — Permanent magnet, ny typ. — Torrläggningen av Zuiderzee. — Natriumljus. — Norsk Hydro. — Nya Tranebergsbron. — Den tekniska utvecklingen under senaste året; ur Ingenjörsvetenskapsakademiens berättelse.—Möjligheterna till antändning genom elektricitet. — Vad är tyngd? — Nya ekolodskonstruktioner. — Patentbeskrivningar.

Era. Årg. 1934, h. 8—12, årg. 1935 h. 1—2.

Ur innehållet. Vargöns kraftverk. — Keramiska isolermaterial för högfrekvens. — Hushållskylskåpens praktiska utformning. — Ångkraften på frammarsch. — Neonrör. — Amerikansk ångkraftteknik. — Elektrisk undervisning. — Bostadens elektriska utrustning. — Från dioden till oktoden. — Ett stort antal elektriska nyheter.

Matematisk Tidsskrift. København 1934, h. 3—4.

Ur innehållet i avd. *A*. S. A. Christensen, Infinitesimalregningens Grundlæggelse. Avd. *B*. J. Favard, Sur la fonction conjuguée d'une fonction presque-périodique. — J. Hjelmslev, Exhaustionsbeviser hos Archimedes. — B. Jessen, Abstrakt Maal- og Integralteori.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1934, h. 1—4.

Ur innehållet. C. Størmer, Indiern Ramanujan, et merkelig matematisk geni. — K. Piene, Regning med matriser. — O. Devik, O. A. Krogness. — Th. Skolem, Den matematiske grunnlagsforskning. — W. Werenskiold, Lengde og bredde på en tre-akset

ellipsoide. — Fr. Engel og P. Heegaard, Sophus Lies Samlede Avhandlinger. — W. Werenskiold, Cariolis-kraften; Lineære transformasjoner. — Opgaver. Bokanmeldelser.

Fysisk Tidsskrift. København 1934, h. 4.

Ur innehållet. R. W. Asmussen, Nobelpristagaren i Kemi 1934; Om Kvanteeffekter ved Reaktioner med de 2 Brintisotoper. — E. Rasmussen, Lysende Luftarter.

Den Høijere Skole. Organ for Filologenes og Realistenes Landsforening. Årg. 1934, h. 1—20. Oslo.

I årg. 1934 ha förekommit följ. artiklar av matemtisk-naturvetenskapligt innehåll. O. Lindstad, Litt dynamikk. — K. Alfsen, Nogen vekselstrømsforsøg. — A. Føyn, Matematikkopgavene ved middelskoleeksamen. — R. Krekling, En ny stjerneglobus. — L. Gleditsch, Et kjemisk forsøk som illustrerer Guldberg og Waages lov.

Föredrag under hösten 1934 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk; förman i arbetsutskottet fil. kand. N. E. Fremberg.

Föredrag: fil. mag. Hugo Björk, Polygonala, pyramidala och figurerade tal ($^{14}/_{12}$).

Fysiska Föreningen, ordf. docent O. Lundquist, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: läroverksadjunkt T. Edquist, Något om normala gasjoners rekombination, rörlighet och massa ($^{26}/_{10}$); fil. lic. Börje Kullenberg, Elektronmikroskopet ($^{8}/_{12}$); fil. mag. Nils Frössling, Om bestämningar av elektronens specifika laddning ($^{8}/_{12}$).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens K. E. Thomé.

Föredrag: prof. W. Hückel, Greifswald, Beziehungen zwischen organischer und physikalischer Chemie ($^{11}/_{9}$), Molekülbau und Reaktionsgeschwindigkeit, Molekülbau und Kryoskopische Messungen ($^{12}/_{9}$); prof. L. Smith, Katjonkatalys och kemisk konstitution ($^{19}/_{10}$); doc. E. Larsson, Framställning av några svavelhaltiga syror med hjälp av bromisosmörsyreestrar ($^{19}/_{10}$); prof. L. Smith, Meddelande om tioglycerin ($^{23}/_{11}$); doc. E. Larsson, Om elektrolytisk ledning i fasta ämnen ($^{23}/_{11}$); doc. G. Ljunggren, Gasskydd inom industrien ($^{14}/_{12}$); doc. O. Stelling, De elektrokinetiska fenomenen och möjligheterna för deras tekniska utnyttjande ($^{14}/_{12}$).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, lokalavdelning i Lund, ordf. rektor P. G. Persson, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: prof. J. Koch, Låg- och högfrekventa elektriska växelströmmar ($^{13}/_{10}$). Vid föredraget demonstrerades: fasdifferens mellan spänning och ström i en krets med ohmskt motstånd, självinduktion och kapacitet samt fasdiff. mellan primärström, sekundärström och primärspänning i en transformator medelst slingeroscillograf; magnetisk hysteresis samt oscillatorisk urladdning medelst katodoscillograf; rörsändare med svängningskrets i anodkretsen; rörsändare enl. Barkhausen-Kurz; rörsändare med trepunktskoppling; elektriska trådvågor med rörsändare.

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. W. Odhnoff.

Föredrag: dr. J. Billing, Irreguliära månghörningar, inskrivna i cirklar och det isoperimetriska problemet ($^{27}/_{9}$); fil. lic. Karl Persson, Något om integralekvationer med reell symmetrisk kärna ($^{8}/_{11}$); byråchef E. Stridsberg, Några undersökningar från den elementära algebran ($^{7}/_{12}$); vid detta sammanträde högtidlighölls Sällskapets 25-åriga tillvaro med en festlig samvaro å »Den Gyldene Freden». En till jubileet utgiven minnesskrift föredrogs (anmäles i junihäftet).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. ingenjör C. H. Johansson.

Föredrag: prof. Niels Bohr, København, Tid och rum i atomfysiken ($^{1}/_{12}$).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föredrag: prof. I. Malmer, Demonstration av flygtekniska laboratoriet vid Tekniska Högskolan i Stockholm jämte orienterande föredrag.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. G. Ising, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: dr. L. Hamos, Abbildung mittels Röntgenstrahlen ($^{8}/_{6}$); prof. E. Hulthén, Spektroskopiska undersökningar över den tunga väteisotopen ($^{24}/_{9}$); lektor Eva Ramstedt, Madame Curie, hennes liv och verk ($^{16}/_{10}$); doc. S. Benner, Den s. k. elektronoptikens nyare utveckling ($^{29}/_{10}$); prof. G. v. Hevesy, København, Lättare grundämnens naturliga radioaktivitet ($^{10}/_{11}$); prof. V. Walfrid Ekman, Lund, Några rön från en strömmätningsexpedition

i Atlanten sommaren 1934 ($^{19}/_{11}$, sammanträdet tillsammans med Geofysiska Föreningen).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: prof. Oskar Baudisch, New Haven, The structure of Werner complexes of the iron family and the oxides of iron in relation to the chemical, physical and biological behaviour of the central metal atoms ($^{28}/_{9}$); prof. St. v. Przylecki, Warschau, Über den Zustand des Glykogens im Organismus ($^{26}/_{10}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. A. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Föredrag: fil. dr. H. Heymann, Samuel Klingenstierna ($^{30}/_{10}$); G. Bourion, docteur ès sciences (Rockefeller-stipendiat), Les suites partielles de polynomes sections d'une serie de Taylor et l'ultraconvergence ($^{27}/_{11}$); doc. S. Wigert, Stockholm, Kontinuerliga funktioners approximation genom polynom ($^{10}/_{12}$).

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Erik Bäcklin, v. ordf. docent Gunnar Kellström.

Föredrag: amanuens Harald Karlsson, Demonstration av en förenklad Milikan-metod att bestämma elektronladdningen (avsedd som övningslaboration).

Kemiska Sällskapet, ordf. doc. P. Nyhlén, sekr. fil. lic. A. Fredga.

Föredrag: prof. C. Drucker, Elektrolyteffekte in koncentrierter Lösung ($^{15}/_{10}$); ingenjör W. Öhman, Fördelnings- och reaktionsjämvikter vid framställning av nitroglycerin och nitroglykol ($^{26}/_{11}$); prof. The Svedberg, Väteisotoperna ($^{5}/_{12}$).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

725) *En kub är given. Man betraktar de 24 plan, som vart och ett innehåller en kantlinje i kuben och mittpunkterna till två andra. Hur stor del av kubens volym utgör det sammanhängande område kring kubens centrum, som dessa plan avgränsa?* *X.*

726) *En kula med diametern ka, där a är ett positivt tal och k ett egentligt bråk, utför en sinussvängning, så att medelpunkten oscillerar mellan punkterna (a; o) och (— a; o). En likadan kula svänger längs y-axeln med samma periodtal och amplitud. Hur stor måste fasförskjutningen minst vara, om kulorna hela tiden skola gå fria från varandra?* *X.*

727) *Om en rörlig tangent skär tre fixa tangenter a, b, c, till en parabel i resp. A, B, C, så är förhållandet AB : BC konstant. Visa med hjälp av denna sats (eller på annat sätt), att styrlinjen till den parabel, som tangerar sidorna i en i en cirkel inskriven fyrhörning går genom diagonalernas skärningspunkt.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

728) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x(y+z-x) &= 18 \\ y(x+z-y) &= 16 \\ z(x+y-z) &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

Svar: x, y och z äro resp. ± 3; ± 4; ± 5.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 728 är insänd av *C. H.*, 731 av *L.*, 732 av *S. B.*, 733 av *P.*, 734 av *A. L.*, 729, 730, 735—747 av *X.*

729) I en geometrisk serie är $s_3 = 1$ och $s_6 = 3$. Beräkna s_9.

Svar: 7.

730) Tungan på en svängande vågbalans vänder vid delstrecken 28, 4, 25 på skalan i tre på varandra följande svängningar. Vid vilket delstreck kan den beräknas stanna, om de successiva svängningarna, mätta i antal skaldelar mellan vändpunkterna, antagas utgöra termerna i en geometrisk serie? Skalans nollpunkt befinner sig vid dess ena ändpunkt.

Svar: 15,2.

731) I en parallellogram $ABCD$ bilda AB, AC, AD och BD i nu nämnd ordning geometrisk serie. Bestäm kvoten och parallellogrammens vinklar.

Svar: $\sqrt{2}$; 41°,41 o. s. v.

732) I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = BC = CD = 1$ och $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$. Visa, att fyrhörningens yta är $2 \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.

733) Visa, att ytan av cirkelringen mellan de in- och omskrivna cirklarna till en regelbunden n-hörning med sidan a är beroende av a men ej av n.

Svar: Ytan är $\frac{\pi \cdot a^2}{4}$.

734) I en fyrhörning äro tre sidor lika stora. Vardera diagonalen är lika med den fjärde sidan, som är 5 cm. Beräkna fyrhörningens vinklar och yta.

Svar: 72°, 72°, 108°, 108°; 11,89 cm².

735) I $\triangle ABC$ delas vinkeln A i tre lika delar av höjden och medianen från A. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 30°, 60° och 90°.

736) Om i en triangel $\sin 2A \cdot \sin 2B = \sin^2 C$, så är triangeln likbent.

737) I varje triangel ABC har $\sin A \cdot \left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{C}{2}\right) +$
$+ \sin B \cdot \left(tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right)$ ett konstant värde. Beräkna detta.

Svar: 2.

738) Sidorna i en triangel äro $x-1$, x och $x+1$ längdenheter. Den största vinkeln är dubbelt så stor som den minsta. Beräkna x.

Svar: $x = 5$.

739) Basytan i en regelbunden pyramid är en liksidig triangel med sidan 1 dm. Höjden mot en sidoyta är 0,75 dm. Beräkna pyramidens volym.

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{24}$ dm^3.

740) I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är kantvinkeln vid en sidokant 120°. Hur stor är kantvinkeln vid en baskant.

Svar: 45°.

741) Basytan i en pyramid är en rektangel med sidorna 9 cm och 4 cm. Genom en av rektangelns längre sidor kan läggas ett plan, vars skärningslinjer med sidoytorna, tillsammans med nyssnämnda rektangelsida bilda en halv regelbunden 6-hörning. Sidokanterna i pyramiden äro lika långa. Beräkna deras längd.

Svar: 7 cm.

742) En sfär, som har centrum i ett hörn och går genom fyra hörn på en regelbunden oktaeder, utskär på oktaederns yta en girland av fyra kongruenta cirkelbågar. Sök bågarnas gradtal.

Svar: 120°.

743) En rät vinkel stöder med spetsen mot ett vågrätt bord. Benen bilda vinklarna u och v med bordsytan och $\sin u + \sin v = 1$. Hur stor vinkel bildar den räta vinkelns bissektris med lodlinjen?

Svar: 45°.

744) En parallellepiped begränsas av 6 kongruenta romber med sidan a och vinklarna 60° och 120°. Beräkna volymen.

Svar: $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

745) I vilken likbent triangel är vinkeln mellan en av de lika sidorna och medianen till den andra så stor som möjligt?

Svar: I den liksidiga.

746) Bestäm vinkeln α så, att maximivärdet av funktionen $(x^2 \cos\alpha + x \sin\alpha + \cos\alpha) : (x^2 \sin\alpha - x \cos\alpha + \sin\alpha)$ blir $\frac{1}{2}$.

Svar: $\alpha = 90° + n \cdot 180°$.

747) Linjen $7x + y + 5 = 0$ är ena bissektrisen till vinklarna mellan linjen $4x - 3y + 10 = 0$ och en obekant linje, vars ekvation sökes.

Svar: $3x + 4y - 5 = 0$.

Lösningar till uppg. 687—689.

687) *För vilka värden på a har ekvationen*

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{a}{(a+1)^2} = \frac{a}{x+a^2}$$

1:o *en rot* $= a$; 2:o *två rötter* $= a$; 3:o *en dubbelrot* $\neq a$? *X.*

Värdena $a = 0$ och $a = -1$ liksom $x = -1$ uteslutas.

1:o Insättning visar, att en rot $= a$ för alla $a \neq -1$ och 0.

2:o Ur den givna ekv. och identiteten: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{a}{(a+1)^2} = \frac{a}{a+a^2}$ fås efter subtraktion och uppdelning i faktorer

$$\frac{a-x}{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{a+1}\right) = \frac{a-x}{x+a^2}.$$

Utom $x_1 = a$ har man alltså rötterna till

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{a+1} = \frac{x+1}{x+a^2}. \qquad (1)$$

Ytterligare en rot $x_2 = a$ finnes, om $\frac{2}{a+1} = \frac{1}{a}$, varur $a = 1$.

3:o Här förutsättes $a \neq 1$ och fordras dubbelrot till (1).

Ekv. $(z+\alpha)(z+\beta) = \gamma$ har dubbelrot, om $(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma = 0$. Skrives nu (1) under formen

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{a+1} = \frac{\frac{1}{a^2-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{a^2-1}}, \qquad (2)$$

blir alltså villkoret $\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a^2-1}\right)^2 + \frac{4}{a^2-1} = 0$, varav $a = 0{,}8$.

X.

Även löst av *C. H.* och *L.*

688) *En rät linje med en punkt A, en punkt B utanför densamma och en determinerad linje a äro givna. Bestäm på den givna linjen en punkt X så, att* $\overline{BX}^2 = a \cdot AX$. *X.*

Drag AB och avsätt åt ettdera hållet en sträcka $BC = a$, parallell med linjen. Upprita på BC åt linjen till den cirkelbåge, som innehåller supplementvinkeln till $\angle ABC$. Denna skär linjen i $X(X_1)$. Då är

$\triangle BCX \sim \triangle ABX$ och alltså $AX : BX = BX : BC$ eller

$\overline{BX}^2 = a \,.\, AX$. (antal punkter X kunna variera mellan 0 och 4).

L.

Även löst av *C. H.*

689) *Sök orten för en punkt, som rör sig så, att om normaler fällas mot benen i en likbent triangel, fotpunkterna och basens mittpunkt ligga i rät linje.* *S. B.*

Lägg ett koordinatsystem med origo i triangelns spets och x-axeln utefter höjden. Kalla sidan s och spetsvinkeln 2α samt avstånden från spetsen till fotpunkterna p och p_1. Normalernas ekvationer äro då

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad \text{och} \quad x \cos \alpha - y \sin \alpha = p_1 ;$$

men då fotpunkternas sammanbindningslinje går genom basens mittpunkt, är

$$\frac{p_1 - s}{p_1} = \frac{s - p}{p}.$$

Insättas värdena på p och p_1 i denna, erhålles efter förenkling och omskrivning

$$\frac{\left(x - \frac{s}{2 \cos \alpha}\right)^2}{\frac{s^2}{4 \cos^2 \alpha}} - \frac{y^2}{\frac{s^2}{4 \sin^2 \alpha}} = 1$$

d. v. s. en hyperbel med medelpunkt i omskrivna cirkelns medelpunkt och ena vertex i triangelns spets. *L.*

Även löst av *C. H.*

Ett aritmetiskt problem och dess lösning.

Av S. WIGERT.

1. Nedanstående problem utgör en generalisering av en uppgift, som jag för åtskilliga år sedan fann i en svensk veckotidning — jag minns ej mera vilken. Så, som den där formulerades, hade den föga kontakt med det verkliga livet och måste nog uteslutande anses som ett nöjsamt tankeexperiment. Detta kan måhända sägas även om den form, under vilken jag här tillåter mig att framställa den, men den förefaller mig dock något rimligare. Uppgiften lyder som följer.

»En bakteriekoloni förökas så, att varje individ, som självständigt existerat ett givet antal (p) tidsenheter, t. ex. timmar, genom delning avsätter en ny individ och därpå efter varje timma åter en. Efter vilken lag ökas antalet individer?»

Om a_n betecknar antalet vid den n:te timmens slut, så kunna vi skriva

$$a_n = \alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)} + \ldots + \alpha_n^{(p-2)} + \alpha_n,$$

där $\alpha_n^{(\nu)}$ betyder antalet individer, som existerat ν timmar, och α_n antalet av dem, vilkas ålder är $\geqq p-1$ timmar.[1] Då blir

$$\alpha_{n+1}^{(0)} = \alpha_n,\ \alpha_{n+1}^{(1)} = \alpha_n^{(0)},\ \alpha_{n+1}^{(2)} = \alpha_n^{(1)} \ldots \alpha_{n+1}^{(p-2)} = \alpha_n^{(p-3)},\ \alpha_{n+1} = \\ = \alpha_n^{(p-2)} + \alpha_n,$$

[1] $\alpha_n^{(0)}$ = antalet »nyfödda»; p antages vara $\geqq 2$.

varav följer

$$a_{n+1} = a_n + \alpha_n, \ \ldots \ a_{n+p} = a_n + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p-1}.$$

Men vi ha också

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{n+p-2} = \alpha_{n+p-1}^{(0)} \\ \alpha_{n+p-3} = \alpha_{n+p-2}^{(0)} = \alpha_{n+p-1}^{(1)} \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \alpha_n = \alpha_{n+1}^{(0)} = \alpha_{n+2}^{(1)} = \ldots \alpha_{n+p-1}^{(p-2)} \end{array}\right.$$

och härav följer

$$a_{n+p} = a_{n+p-1} + a_n. \qquad (1)$$

Ifall hela kolonien härstammar från en enda individ, har man $a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 1$, $a_p = 2$, varefter a_{p+1}, a_{p+2} etc. kunna bestämmas successivt ur (1).

2. Om vi emellertid icke äro nöjda med detta, utan även vilja veta något om hur a_n växer med n och rentav begära ett explicit uttryck för talet a_n, så är saken ej längre så enkel. Försöker man satisfiera ekvationen (1) genom att sätta $a_n = x^n$, så finner man, att detta verkligen blir en lösning, om x är en rot till den algebraiska ekvationen

$$x^p - x^{p-1} - 1 = 0. \qquad (2)$$

Kallar man dess rötter, vilka alla äro olika, för $x_1 \ldots x_p$, så bli $x_1^n \ldots x_p^n$ och allmännare $A_1 x_1^n \ldots A_p x_p^n$ lösningar, såframt $A_1 \ldots A_p$ äro koefficienter, som ej bero av n, utan blott av det fasta talet p. Ävenså får man på grund av *differens*-ekvationens (1) lineära form en lösning

$$a_n = A_1 x_1^n + \ldots + A_p x_p^n,$$

och här kunna $A_1 \ldots A_p$ bestämmas så, att $a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 1$, $a_p = 2$. Men detta uttryck blir högst komplicerat, emedan man i allmänhet ej har några enkla uttryck för $x_1 \ldots x_p$. Vi skola därför taga saken på ett något

olika sätt, men först kunna vi dock draga en viktig slutsats av det funna resultatet.

Ekvationen (2) har, då p är ett udda tal, en reell rot, som är positiv och belägen mellan 1 och 2. De övriga rötterna äro alla komplexa. Är p jämnt, finnas två reella rötter; den ena är även här belägen mellan 1 och 2, den andra mellan 0 och -1. Vi kunna övertyga oss om, att i varje fall den positiva roten (ϱ) är den *absolut* största. Ty om vi sätta $x = r(\cos v + i \sin v)$, så följer

$$\begin{cases} r^p \cos pv - r^{p-1} \cos(p-1)v = 1 \\ r^p \sin pv - r^{p-1} \sin(p-1)v = 0 \end{cases}; \quad r^{2p} + r^{2p-2} - 2r^{2p-1} \cos v = 1.$$

Är nu $\cos v > 0$ men < 1, så blir $1 > (r^p - r^{p-1})^2$, så att man för $r > 1$ får $r^p - r^{p-1} < 1$ och $r < \varrho$. Är åter $\cos v < 0$, så blir $r^{2p} + r^{2p-2} < 1$, d. v. s. $r < 1$. Av detta framgår, att *kvoten* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{A_1 x_1^{n+1} + \ldots + A_p x_p^{n+1}}{A_1 x_1^n + \ldots + A_p x_p^n}$ *närmar sig gränsvärdet* ϱ, *då* n *växer över varje gräns.*

3. För att få ett explicit uttryck av hyggligare form för a_n, anmärka vi, att $S_n = x_1^n + \ldots + x_p^n$ är en lösning till (1), och denna kan i sin egenskap av symmetrisk funktion av rötterna uttryckas rationellt med tillhjälp av ekvationens koefficienter. I själva verket gäller, att

$$S_k = k \sum_{0 \leq \mu \leq \frac{k}{p}} \frac{|k-1-(p-1)\mu}{|\mu \; |k-p\mu}, \tag{3}$$

en formel, som gavs redan 1782 av Waring.[1]

Vi kunna därför också framställa a_n under formen

$$a_n = B_1 S_n + B_2 S_{n+1} + \ldots + B_p S_{n+p-1},$$

och det gäller blott att bestämma $B_1 \ldots B_p$ så, att $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 1$, $a_p = 2$. Emedan nu $S_1 = \ldots = S_{p-1} = 1$, $S_p =$

[1] Se t. ex. SERRET: Cours d'algèbre supérieure, tome 2, section 2, chap. 2.

$= p + 1$, $S_{p+1} = p + 2, \ldots S_{2p-1} = 2p$, få vi följande ekvationsystem

$$\begin{cases} B_1 + \ldots + B_{p-1} + (p+1)B_p = 1 \\ B_1 + \ldots + B_{p-2} + (p+1)B_{p-1} + (p+2)B_p = 1 \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — —} \\ B_1 + (p+1)B_2 + \ldots + (2p-1)B_p = 1 \\ (p+1)B_1 + (p+2)B_2 + \ldots + 2pB_p = 2. \end{cases}$$

Ur detta erhålles först

$$B_{p-\nu} = -\frac{(p-1)^{\nu-1}}{p^\nu} B_p, \ (\nu = 1 \ldots p-2), \tag{4}$$

varefter de två sista ekvationerna ge

$$pB_1 + B_2 + \ldots + B_p = 1,$$

som leder till

$$B_1 = \frac{1}{p} - \frac{(p-1)^{p-2}}{p^{p-1}} B_p. \tag{5}$$

Kombineras den sist använda ekvationen med $B_1 + \ldots + B_p + pB_p = 1$, så finner man $(p-1)B_1 = pB_p$ och

$$B_p = \frac{(p-1)p^{p-2}}{p^p + (p-1)^{p-1}}. \tag{6}$$

Därmed är koefficientbestämningen slutförd.

Denna räkning förutsätter emellertid, att $p > 2$. För $p = 2$ finner man omedelbart

$$B_1 + 3B_2 = 1, \ 3B_1 + 4B_2 = 2,$$

varav $B_1 = \frac{2}{5}$, $B_2 = \frac{1}{5}$, och a_n bli de s. k. *Fibonacci'ska* talen. I det av mig i början omnämnda tidskriftsproblemet antogs just $p = 2$, men där talades ej om bakterier, utan om — kor, varvid dock tidsenheten ej var en timme, utan ett år. Skulle slutligen p vara $= 1$, så ha vi det triviala fallet $a_n = 2^n$.

Vinkelns tredelning. I.

Av J. TANDBERG.

»L'Académie a pris, cette année, la resolution de ne plus examiner aucune solution des Problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle ...» (Franska Vetenskapsakademiens beslut 1775).

Det gamla problemet om vinkelns tredelning har aldrig förlorat förmågan att väcka intresse. De tre stora klassiska problemen: vinkelns tredelning, kubens fördubbling och cirkelns kvadratur, som vi fått i arv från antiken, äro ännu efter 2000 år icke lösta med hjälp av den klassiska geometriens medel: cirkel och rät linje. Den västerländska matematiken har i stället omsider lyckats bevisa, att det är principiellt omöjligt att lösa problemen på detta sätt. Därmed har behandlingen av problemen med hjälp av nämnda medel avförts från matematikernas arbetsprogram, vilket dock icke hindrat, att individer av mera romantisk än logisk inställning alltjämt sysslat därmed, kanske till omväxling med bearbetandet av andra stora problem såsom Fermats stora sats, konstruerandet av ett perpetuum mobile eller tolkandet av Nostradamus profetior.

Alla lösningsförslag till vinkelns tredelning hava, åtminstone så vitt de varit konstruktioner med passare och linjal, givit mer eller mindre goda approximationer. I denna tidskrifts 4:e årg. sid. 239 o. f. behandlas t. ex. en approximativ konstruktion, som befinnes vara exakt för 0°, 90° och ett vinkelvärde nära 33°. Maximala felet är c:a $51'$ för en vinkel omk. 67°. — En kombinerad lösning av vinkelns tredelning och kubens fördubbling finnes publicerad i 10:e årg. sid. 68 o. f., men konstruktionen göres icke med rent euklideiska hjälpmedel, cirkel och rät linje, utan med hjälp av en glidande linjal, varvid en konkoid uppritas, som löser problemen.

Att med rent euklideiska medel dela en vinkel i tre exakt lika delar är möjligt för vissa bestämda vinklar, t. ex. 90°, 72°, 63°, 54° o. s. v. eller alla vinklar, som äro en multipel av 9°. Man kan även konstruera [1] vinkeln 3° men icke 1°. Slutligen må nämnas, att man kan tredela en vinkel, vars cosinus är lika med $\frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{27}$ eller $\frac{22}{27}$, samt vinklar, som uppfylla vissa andra villkor. Men att tredela en godtycklig, given vinkel är liktydigt med att konstruera fram rötterna till ekv.:

$$y^3 - 3y - 2a = 0, \text{ där } a^2 < 1.$$

Denna ekvation härledes ur sambandet:

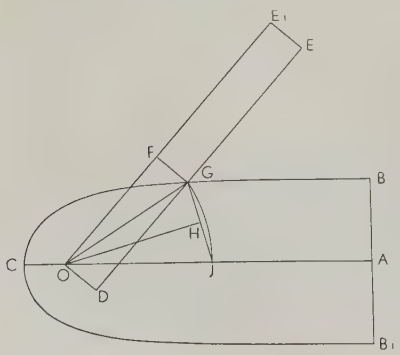
$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

om vi här sätta: $y = 2\cos\varphi$ och $a = \cos 3\varphi$.

Kunde man exakt och behändigt rita upp vissa kroklinjer (hyperbeln, parabeln, Pascals snäcka, araneiden, strofoiden, kubiska parabeln, vissa spiraler, den nämnda konkoiden o. s. v.), gåves det lika exakta som enkla metoder att lösa problemet. Ett steg åt detta håll är att begagna något av de matematiska instrument, som uppfunnits för ändamålet.[2]

[1] Genom att tre gånger halvera centrivinkeln till sidan i en regelbunden 15-hörning, som kan konstrueras.

[2] Dylika uppfinningar göras alltjämt. Helt nyligen mottog tidskriften till påseende ett sådant instrument, konstruerat av Forstmästare S. Klockhoff, Örnsköldsvik. Det är en god representant för de mekaniska metoderna och må anföras såsom exempel på dessa. Instrumentet består av en celluloidskiva (se fig.) $ABCB_1$, försedd med en kring O vridbar, tunn celluloidlinjal OE_1ED. Konturen BCB_1 följer ena grenen av Delanges »Trisekant», en 4:e gradskurva, som först beskrevs



Vi skola emellertid uteslutande hålla oss till rent euklideiska hjälpmedel och se, hur pass nära sanningen vi kunna komma med dem.

Dürers konstruktion.

En god konstruktion anvisas av ALBRECHT DÜRER (1525). Vi låta honom själv tala (se fig. 1):

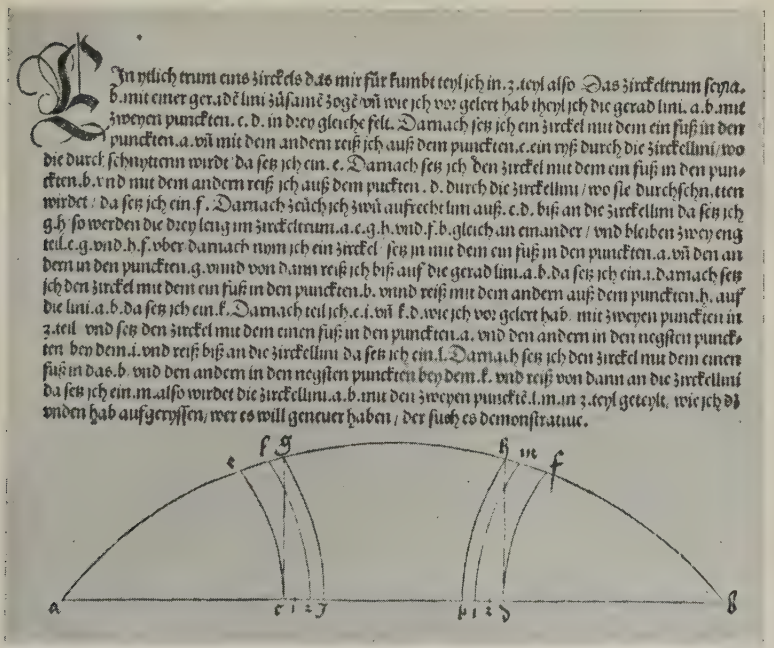


Fig. 1. Ur ALBRECHT DÜRER, »Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt», Nürnberg 1525.

av P. Delanges 1783 men råkade i glömska och sedan åter upptäcktes flera gånger. Kurvan, vars ekv. är $(x^2 + y^2)(4r^2 - y^2) = 4r^4$, har av Klockhoff (utan kännedom om dessa tidigare arbeten) grafiskt konstruerats symmetriskt kring grundlinjen COA. Linjalens bredd är överallt $= OD = FG = r = OC$. En godtycklig punkt G på kurvan har egenskapen att längden av en korda GJ till en cirkel $O(OG)$, som skär grundlinjen i J, är $= 2r = 2FG$. Drag $OH \perp GJ$. $\triangle OFG \cong \triangle OGH \cong \triangle OHJ$, varför $\angle FOG = \angle GOH = \angle HOJ = \frac{1}{3} \angle AOF$. Lägges instrumentet över en given vinkel α så, att $\angle AOF = \alpha$, blir alltid $\angle FOG = \frac{\alpha}{3}$.

Texten torde kunna översättas:

Ett godtyckligt stycke av en cirkel, som jag har, delar jag i 3 delar sålunda / Stycket av cirkeln vare AB, sammandraget med en rät linje / och som jag förut lärt delar jag den räta linjen AB med två punkter CD i tre lika delar. Därefter sätter jag en passare med ena foten i punkten A och med den andra ritar jag från punkten C en rits genom cirkellinjen / där denna skäres / sätter jag ett E. Därefter sätter jag passaren med ena foten i punkten B och med den andra ritsar jag från punkten D genom cirkellinjen / där denna skäres / sätter jag ett F. Därefter tecknar jag två upprätta linjer från C och D ända till cirkellinjen där jag sätter G och H / så bli de tre sträckorna i cirkelbågen, AE, GH och FB lika varandra / och det blir två små bitar EG och HF över / därpå tar jag nu en passare / sätter den med ena foten i punkten A och den andra i punkten G och därifrån ritsar jag ända till den räta linjen AB, där sätter jag ett I, därefter sätter jag passaren med ena foten i punkten B och ritsar med den andra från punkten H mot linjen AB, där sätter jag ett K. Därefter delar jag CI och KD som jag förut har lärt / med två punkter i 3 delar / och sätter passaren med ena foten i punkten A och den andra i den närmaste punkten vid I:et och ritsar ända till cirkellinjen / där sätter jag ett L. Därefter sätter jag passaren med ena foten i B / och den andra i närmaste punkten vid K och ritsar därifrån till cirkellinjen där sätter jag ett M, sålunda delar cirkellinjen AB med de tvenne punkterna L och M i 3 delar / som jag nedan har ritat upp det / den som vill ha det nogare / han må söka det genom exakt konstruktion.

Det sista uttrycket hos Dürer (se fig. 1) »wer es will geneuer haben, der such es demonstrative» låter dunkelt, men får sin förklaring, när vi erfara, att han skilde mellan exakta (»demonstrative») konstruktioner och approximativa (»mechanice»). Han är alltså fullt medveten om, att metoden innebär en approximation. Vi skola längre fram antaga hans inbjudan att göra delningen noggrannare genom att bygga vidare på den av honom lagda grunden. Dock kommer vår metod fortfarande att höra till de approximativa, även om felet blir mycket litet.

En närmare granskning av Dürers konstruktion ger till resultat, att han får två sins emellan lika stora cirkelbågar

AL och BM, som äro något för små, och en båge LM, som är för stor. (Uppritandet av bågarna CE och DF är för konstruktionen överflödigt.) Kalla vi nu och fortsättningsvis den vinkel, som skall delas, för α och låta φ beteckna den approximativa tredjedelen av α samt ε avvikelsen från det exakta värdet, hava vi allmänt:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3} + \varepsilon .$$

Hos Dürer hava vi två vinklar: φ_1 motsvarande bågen AL = BM med felet ε_1 och φ_2 motsvarande bågen LM med felet ε_2. Vi kunna alltså skriva:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{3} + \varepsilon_1 \text{ och } \varphi_2 = \frac{\alpha}{3} + \varepsilon_2;\ 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.$$

Vinkeln φ_2 har alltså numeriskt dubbelt så stort fel som φ_1. Vi avse närmast denna senare vinkel, när vi tala om Dürers vinkel. I den hithörande matematiska litteraturen har man välvilligt låtit vinkeln φ_2 falla bort utan att ens nämna den. Sambandet mellan α och φ_1 gives explicit [1] av följande uttryck:

$$\varphi_1 = 2 \,.\, \arcsin \frac{1}{9}\left\{3\sqrt{2 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{9 - 10\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^4\frac{\alpha}{2}}} + \sin\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

En numerisk beräkning av felet återgives i tab. 1.

Tabell 1.

		Dürer		Cominotto
α	$\frac{\alpha}{3}$	ε_1	ε_2	
0°	0°	0	0	0
30°	10°	— 0″.007	0″.014	11″.5
60°	20°	— 0″.91	1″.82	1′32″
90°	30°	—15″.5	31″.0	5′13″
120°	40°	— 1′56″	3′52″	12′49″
180°	60°	—31′37″	1°3′15″	43′24″

[1] F. Vogel, Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht *62* (1931) s. 145 o. f.

Vi skola i korthet betrakta några mera kända konstruktioner.

A. Cominotto (1895); Se fig. 2; $\angle AOB = \alpha$. Dela radien AO i tre lika delar med punkterna D och E. Avsätt OF = = OG = OD = DE = EA. Rita en halvcirkel på AD. Cirkeln A(GD) uppritas, den skär halvcirkelbågen över AD i H. Lägg en rät linje genom D och H och upprita cirkeln D(AD).

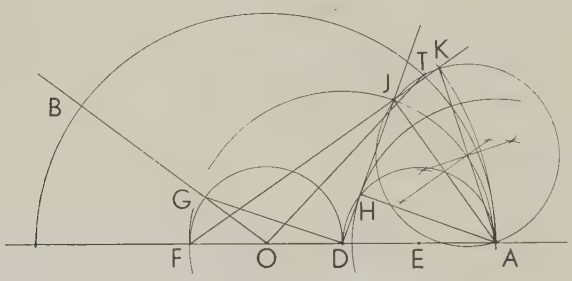


Fig. 2. Cominottos konstruktion,

den skär linjen DH i J. Drag linjen JF och avsätt FK = FA. Konstruera den cirkel, som går genom K, J och A. Den skär cirkeln O(OA) i T. $\angle TOA = \varphi = \text{approx } \frac{\alpha}{3}$. Metoden är invecklad, opraktisk och ger dåliga värden, men anföres ofta [1] som exempel på en approximativ konstruktion. Se tab. 1.

En annan konstruktion av Cominotto, anförd av Enriques [2] ger sämre värden.

P. Monti (1895) har en ganska omständig metod, anförd av Enriques ([2]), med ett största positivt fel av 6′8″ nära $\alpha = 70°$. Felet passerar noll vid $\alpha \sim 88°$ och blir — 1′55″ vid 90°. Med undantag av ett par mycket små vinkelområden (0° till 4° och 87° till 89°) är felet alltid större än 1′.

[1] F. Vogel, Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht *62* (1931) s. 145 o. f.

[2] F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie II, Leipzig 1907.

C. HUYGENS (* 1629 † 1695) har angivit[1] följande enkla metod (se fig. 3): $\angle AOB = \alpha$ har bissektrisen OC; avsätt $CD = CO$. Linjen AO skär cirkeln O(OA) i F och linjen FD

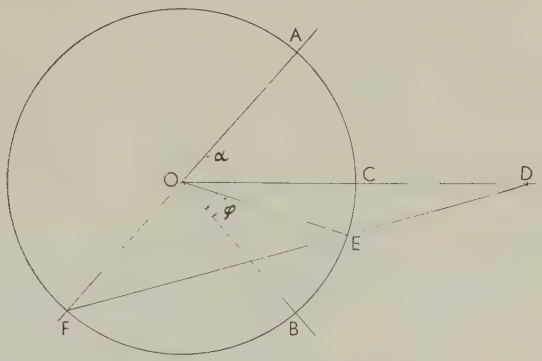


Fig. 3. HUYGENS konstruktion.

skär samma cirkel i E; $\angle BOE = \varphi$. (Om härvid ED hade varit = OE = cirkelradien, skulle konstruktionen blivit exakt.)

N. FIALKOWSKI (1860) har publicerat[2] ett flertal konstruktioner, bland vilka man dock även påträffar några tidigare kända (t. ex. den föregående). Följande är enkel och originell (se fig. 4): $\angle AOB = \alpha$. Drag diametern $DE \perp AO$ i cirkeln O(OA). Cirklarna D(DE) och E(ED) skära varandra i F. Linjen BF skär DO i G. Cirkeln O(OG) skär linjen AO i H och cirkeln G(GO) i J. Kordan HJ avsättes från A till J′ och blir korda i den båge AJ′, vars medelpunktsvinkel $AOJ' = \varphi$. Följande relation gäller:

$$\sin \varphi/2 = \sqrt{3} \,.\, \sin 15^\circ \,.\, \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3} + \cos \alpha}.$$

[1] Citerad efter A. MITZSCHERLING, Das Problem der Kreisteilung, Leipzig 1913.

[2] N. FIALKOWSKI, Theilung des Winkels und des Kreises, Wien 1860. — Metoden även hos Mitzscherling.

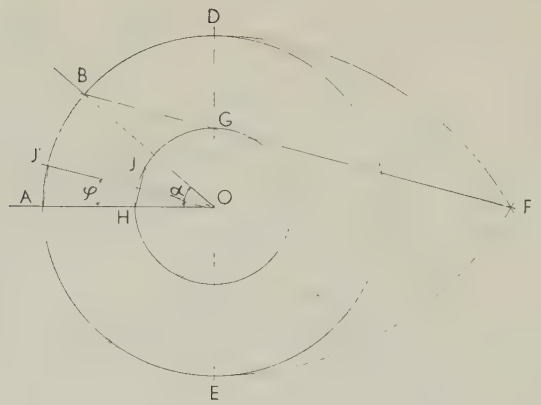


Fig. 4. Fialkowskis konstruktion.

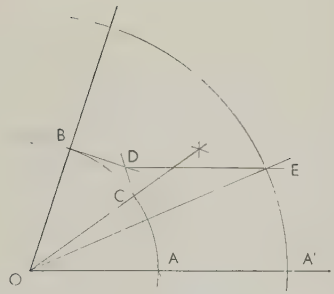


Fig. 5. Karajordanoffs konstruktion.

B. Karajordanoff.[1] Fig. 5. $\angle AOB = \alpha$; dess bissektris OC skär cirkeln O(OA) i C; cirkeln O(OA′) har radien $OA' = 20A$; linjen AC och tangenten i B till cirkeln O(OA) skära varandra i D; genom D lägges en linje parallell med OA′; den skär cirkeln O(OA′) i E; $EOA' = \varphi$. Metoden är enkel och klar och ger ett maximalt fel av $-2'13''$ vid $\alpha = 70^\circ 15'$; vid $\alpha = 0$ och $\alpha = 90^\circ$ är felet noll.

E. Kopf (1933). En konstruktion, som vad noggrannheten beträffar, kan ställas jämsides med Dürers, har givits av en matematiskt olärd men envis skräddare, E. Kopf i Ludwigshafen. Kopf har prövat sig fram i avsikt att finna en exakt lösning. Redan för några år sedan uppvaktade Kopf en matematiker med sina lösningar och fick även en sådan

[1] Direktör för Bulgariens geografiska institut. Metoden refererad och genomräknad av Obreskowa i Zeitschr. d. Österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins, Bd 80 (1928), p. 301.

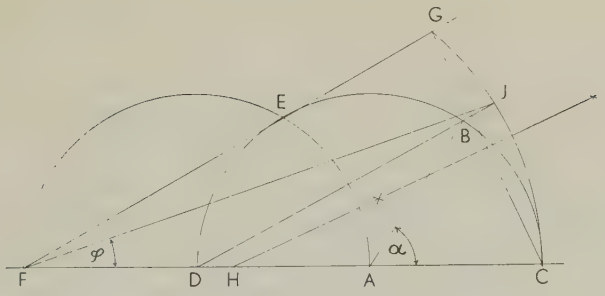


Fig. 6. KOPFS konstruktion.

publicerad.[1] Dess maximala fel var $\varepsilon = -8'12''$ vid $\alpha = 52°34'36''$; $\varepsilon = 0$ vid $\alpha = 0°$ och $\alpha = 90°$. Kopf har arbetat vidare och kommit med nya lösningsförslag.[2] Ett

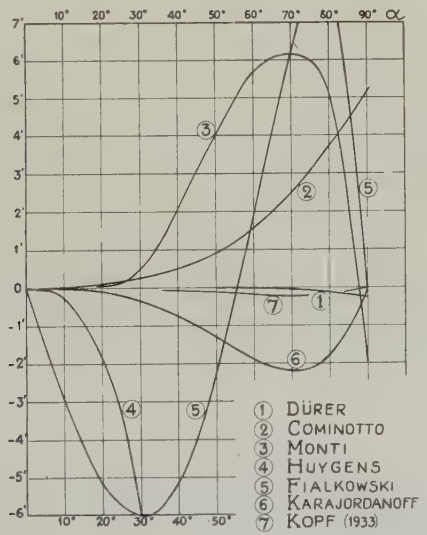


Fig. 7. Felfördelningen vid olika metoder.

[1] Meddelad av O. PERRON i Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Abt., 1929, s. 341.

[2] PERRON, därs. 1933, s. 439, anser att »keine in der Literatur vorkommende Konstruktion auch annähernd mit ihr zu konkurrieren vermag». — Kort ref. i »Forschungen und Fortschritte» X 101 (1934).

sådant, vars noggrannhet betecknats som »geradezu verblüffend», är följande (se fig. 6):

$\angle BAC = \alpha$. Upprita cirklarna A(AC) och D(AC)', där DA = AC och den senare cirkeln skär grundlinjen i punkterna A och F. Linjen FE tangerar cirkeln A(AC) i E. På samma linje avsättes sträckan EG = AC. Mittnormalen till GC träffar linjen CF i H. Upprita cirkeln H(HC), som skär linjen DB i J. $\angle JFC = \varphi$. Denna vinkel φ har ett maximalt fel av $-14{,}86''$ för $\alpha = 69°30'$ och felet understiger $1''$ för $\alpha = 20°$. Metoden hör till de noggrannaste, som tidigare publicerats.

Felen vid de hittills nämnda metoderna finnas grafiskt återgivna i fig. 7.

Isens specifika vikt.

Ett mätglas av 200 cm³:s rymd fylles till hälften med kallt vatten, vars temperatur bör vara så nära 0° som möjligt, och volymen (v_1) avläses. I vattnet nedläggas därefter isbitar i sådan mängd, att vattenytan stiger till bortåt 200 cm³. (Lämpligen lägges överst en relativt stor isbit, vilken lätt kan hållas nedtryckt under vattenytan med tillhjälp av en blyertsspets, metalltråd el. d.) Den sammanlagda volymen är nu v_2 cm³. Sedan mätglasets innehåll överförts i en bägare eller kolv, vilken uppvärmes till dess all is smält (men icke vidare), hälles detsamma tillbaka i mätglaset, där volymen v_3 avläses. Isens spec. vikt får värdet

$$\frac{v_3 - v_1}{v_2 - v_1}.$$

Försöket synes mig instruktivt i det att isens volymsminskning vid smältning framträder på ett synnerligen påtagligt sätt. Förf. har med framgång använt metoden vid laborationer i klasserna 3^5 och 2^4 vid Skellefteå samrealskola.

Hilding Nilsson.

Om inducerad radioaktivitet.

Av OSVALD LUNDQUIST.[1]

1. Atomkärnan och de radioaktiva fenomenen.

En karakteristisk egenskap hos de tyngsta elementen i det periodiska systemet är som bekant, att de under emission av radioaktiv strålning undergå ett spontant förlöpande sönderfall. Varje försök till tolkning av de radioaktiva fenomenen anknyter till den av E. RUTHERFORD uppställda och senare av N. BOHR vidare utbyggda teorien för atomens byggnad. Denna teori antager som bekant varje atom vara sammansatt av en positivt elektriskt laddad kärna, som omkretsas av ett system av elektroner, till antalet lika stort som ifrågavarande elements ordningstal Z i det periodiska systemet. Då varje elektron är bärare av *ett* negativt elementarkvantum,[2] måste kärnans laddning utgöra Z elementarkvanta,[3] för att atomen utåt skall verka elektriskt neutral. Elektronhöljets sammanlagda massa är utomordentligt liten i förhållande till kärnans, i vilken i medeltal 99,96 % av atomens hela massa är koncentrerad.

Enligt den Rutherford-Bohrska atomteorien är alltså ett elements plats i det periodiska systemet och därmed dess kemiska egenskaper entydigt bestämd av antalet atomkärnan omkretsande elektroner. Atomkärnans massa och struktur

[1] Uppsatsen återger i huvudsak innehållet av ett föredrag hållet vid sammanträde med Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i Lund den 4 mars 1935.

[2] Dettas storlek $\varepsilon = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ elektrostatiska cgs-enheter.

[3] Kärnans laddning alltså $+ Z\varepsilon$.

äro härvid utan betydelse. De senaste 15 à 20 årens atomforskning har också lärt oss, att mer än hälften av grundämnena äro sammansatta av två eller flera atomarter, som trots samma antal yttre elektroner kunna äga mycket varierande massor (isotopa atomarter). Sålunda känner man av exempelvis elementet kalcium, vars elektronhölje är uppbyggt av 20 elektroner, fyra olika isotoper, vilkas atomvikter äro 40, 42, 43 och 44. Omvänt existera också element med mycket olika kemiska egenskaper men med samma atomvikt. Ett exempel härpå är atomvikten 40, som förekommer utom hos kalcium även hos argon. Atomvikten utgör alltså ej den för det kemiska elementet karakteristiska konstanten utan är fastmera en för atomkärnan karakteristisk storhet.

För fastställande av ett kemiskt element är tydligen endast *en* konstant nödvändig, nämligen antalet kring kärnan kretsande elektroner. En atomkärna däremot kräver för att vara fullt bestämd *två* konstanter: atomvikten och den positiva kärnladdningen. Detta förhållande kan anses tyda på, att atomkärnorna äro uppbyggda av två slag av elementarpartiklar.[1] Enligt nuvarande av talrika experiment styrkta uppfattning utgöras dessa elementarpartiklar av vätekärnor (protoner)[2] och neutroner.[3]

Man har på flera sätt från olika elements atomkärnor kunnat frigöra såväl protoner som neutroner, varvid den ursprungliga atomkärnan samtidigt omvandlas i en ny kärna. Längst bekant är den av RUTHERFORD och hans lärjungar konstaterade utlösningen av protoner från de lättare elementens kärnor genom bombardement med snabba α-partiklar. Protonutlösningen är en direkt följd av stötprocesser mellan α-partiklarna och de ifrågavarande elementens atomkärnor.

[1] I annat fall vore existensen av isotopa atomarter ej heller möjlig.

[2] Jfr tab. 1, sid. 5.

[3] Jfr uppsatsen i denna tidskrift, Årg. *17*, s. 92—94, 1934 samt tab. 1 nedan.

Vid exempelvis kväve förlöper den enskilda stötprocessen enligt följande formel [1]:

$$_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1 \qquad \text{I}$$

α-partikeln infångas av kärnan, ett förhållande som man direkt kunnat konstatera genom att studera processen i WILSONS expansionskammare [2]; samtidigt bortspränges en proton och kvävekärnan övergår i en syrekärna (syreisotopen O^{17}). Utlösning av neutroner genom α-partikelbombardement har först konstaterats av J. CHADWICK (1932) vid elementen litium, beryllium och bor i anslutning till experiment utförda av IRÈNE CURIE och F. JOLIOT. Utlösningen av neutroner anses förlöpa på liknande sätt som protonutlösningen. Sålunda vid beryllium:

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1 \qquad \text{II}$$

α-partikeln infångas av kärnan, en neutron ($_0n^1$) bortspränges, av berylliumkärnan blir en kolkärna (isotopen C^{12}).

Jämte protoner och neutroner ingå, ehuru som sekundära enheter, α-partiklar som beståndsdelar i atomkärnorna.[3] Att så är förhållandet vid de tyngsta elementens kärnor är sedan länge känt från de radioaktiva fenomenen. Som exempel kunna vi anföra den under emission av α-partiklar spontant förlöpande omvandlingen av elementet radium i radiumemanation, vilken process försiggår enligt följande schema:

$$_{88}Ra^{226} \rightarrow {}_{86}RaEm^{222} + {}_2He^4 \qquad \text{III}$$

[1] Atomkärnan av ett element M betecknas här $_ZM^A$, där Z anger kärnans laddning (antalet elementarkvanta) och A kärnans massa (enhet: syrets atomvikt = 16); $_2He^4$ är beteckningen för α-partikeln, vars massa är 4 och laddning 2; α-partiklarna äro som bekant identiska med He-kärnor. $_1H^1$ betecknar den bortsprängda protonen.

[2] Jfr uppsatsen i Årg. *17*, s. 79.

[3] Varje α-partikel antages vara uppbyggd av 2 protoner och 2 neutroner.

Orsaken till att α-partiklar utan något som helst yttre ingripande frigöras från Ra-kärnorna antages vara, att dessa kärnor — liksom alla de radioaktiva elementens kärnor — befinna sig i ett instabilt tillstånd. Även från de lättare elementens stabila kärnor har man på senaste tiden — genom bombardement såväl med snabba neutroner som med protoner — lyckats avskilja α-partiklar.

Som bekant existerar det ännu en art av omvandlingsprocesser vid de naturliga radioelementen, de som förlöpa under emission av β-partiklar (negativa elektroner).[1] En sådan process är följande — den spontant försiggående omvandlingen av RaE i RaF (polonium):

$$_{83}\mathrm{RaE}^{210} \rightarrow {}_{84}\mathrm{RaF}^{210} + {}_{-1}\mathrm{e} \qquad \text{IV}$$

Vid de konstgjorda omvandlingsprocesser, som återges av formlerna I och II äro de nybildade atomkärnorna (O^{17} resp. C^{12}) *stabila* och tillhöra atomarter, som redan äro kända från isotopforskningen. I början av föregående år kunde emellertid I. Curie och F. Joliot vid undersökningar utförda å l'Institut du Radium i Paris konstatera, att vid vissa element genom α-partikelbombardement bildas *instabila* atomarter, vilka först genom ett efterföljande radioaktivt sönderfall övergå i stabila slutprodukter. Kort efter denna Curie-Joliots upptäckt funno E. Fermi och hans medarbetare i Rom, att radioaktiva atomkärnor även bildas genom bestrålning av vissa element medelst snabba neutroner. Sönderfallet av dessa på konstlad väg åstadkomna radioelement befinnes förlöpa under emission av antingen *positiva*[2] eller *negativa elektroner.*

Den närmast till hands liggande tydningen av de under elektronemission förlöpande radioaktiva omvandlingsproces-

[1] Vi beteckna i det följande den negativa elektronen, vars massa är mycket liten i jämförelse med massorna av atomkärnorna (jfr tab. 1), med $_{-1}$e.

[2] Jfr uppsatsen av A. Leide i denna tidskrift, Årg. 17, s. 153—68, 1934 samt tab. 1 nedan.

serna är naturligtvis den, att de emitterade elektronerna ursprungligen förefunnits som beståndsdelar i de sönderfallande elementens kärnor. Ett flertal fakta, varpå vi ej här kunna närmare ingå, tala emellertid emot antagandet att elektroner existera *inom* atomkärnarna. I anslutning till en nyligen (1934) av E. Fermi framställd teori, vars detaljer knappast låta sig åskådligt framställas, tyder man uppträdandet av en elektron (positiv eller negativ) vid en kärnprocess numera vanligen så: En inom atomkärnan befintlig proton kan under vissa förhållanden övergå i en neutron. Härigenom förlorar atomkärnan laddningen ε. Detta ger sig *utanför* kärnan till känna genom uppträdandet av en positiv elektron. Omvänt kan även en av kärnans neutroner i vissa fall övergå i en proton, varigenom kärnans laddning ökas med *ett* elementarkvantum: en negativ elektron (β-partikel) uppträder *utanför* kärnan. En övergång proton $\rightleftarrows$ neutron *innanför* atomkärnan manifesteras alltså genom uppträdandet av positiva eller negativa elektroner *utanför* densamma.

Tabell 1.

Beteckning	Partikel	Laddning	Massa [1]
$_2He^4$	α-partikeln	$+2\varepsilon$	4,0011
$_1H^1$	Protonen	$+\varepsilon$	1,0072
$_0n^1$	Neutronen	0	1,008
$_1e$	Posi[tiva elek]tronen	$+\varepsilon$	0,0005
$_{-1}e$	Negativa elektronen (β-partikeln)	$-\varepsilon$	0,00055

Tabell 1 innehåller en sammanställning av laddningar och massor för de olika ovan berörda arterna av korpuskler. För neutronen och den positiva elektronen, vilkas laddning och massa ännu ej kunnat bestämmas med samma noggrannhet som de övriga partiklarnas, upptager tabellen de sannolikaste värdena.

[1] Enhet: Syrets atomvikt = 16,00000.

2. Uppkomst av radioaktiva element genom bestrålning medelst elektriskt laddade korpuskler (α-partiklar, protoner, deutoner).

Kort efter det C. ANDERSON år 1932 i samband med sina undersökningar över den kosmiska strålningen upptäckt den positiva elektronen, konstaterade I. CURIE och F. JOLIOT, att dylika partiklar utsändas från elementen bor, magnesium och aluminium, då dessa element bombarderas med snabba α-partiklar från polonium. Vid en närmare undersökning av positronemissionen från dessa element gjorde CURIE och JOLIOT i början av 1934 den epokgörande upptäckten, att utsändandet av de positiva elektronerna fortsätter även sedan α-bestrålningen genom Po-preparatets avlägsnande upphört. Det visade sig vidare, att antalet emitterade positroner efter α-bombardementets upphörande minskades exponentiellt med tiden på alldeles samma sätt som antalet emitterade α- resp. β-partiklar vid de naturligt radioaktiva elementen. CURIE och JOLIOT drogo härav den slutsatsen, att det härvid rörde sig om en ny art av radioaktivitet, som framkallats (inducerats) av α-bombardementet. Vi skola i det följande något närmare studera förhållandena vid aluminiumbestrålningen.

Redan före CURIES och JOLIOTS upptäckt var det bekant, att α-bombardement av aluminium utlöser emission av såväl protoner som neutroner. Såsom tidigare framhållits, tyder man utsändandet av dessa båda slag av korpuskler såsom härrörande från direkta stötprocesser mellan α-partiklarna och det bestrålade elementets atomkärnor.

Reaktionsförloppen måste därför antagas vara följande [1]:

$$_{13}Al^{27} + {}_{2}He^{4} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_{1}H^{1} \qquad \text{I}$$

$$_{13}Al^{27} + {}_{2}He^{4} \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_{0}n^{1} \qquad \text{II a}$$

[1] Isotopforskningen har hos Al konstaterat endast *en* atomart, Al^{27}. De i reaktionsförloppen deltagande Al-kärnorna måste alltså vara Al^{27}-kärnor.

De vid den senare kärnprocessen bildade P^{30}-kärnorna har man anledning antaga vara instabila. Den i naturen förekommande fosforn har nämligen isotopforskningen funnit bestå av ett enda atomslag (P^{31}). CURIE och JOLIOT antaga, att den vid Al-bestrålningen konstaterade positronemissionen härrör från det spontana sönderfallet av dessa instabila P^{30}-kärnor, för vilka de föreslå benämningen radiofosfor. Sönderfallet förlöper enligt CURIE och JOLIOT sålunda:

$$_{15}P^{30} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_{1}e \qquad \text{II b}$$

De instabila fosforkärnorna övergå alltså under positronemission i kiselkärnor. Hos kisel känner man tre stabila isotoper: Si^{28}, Si^{29} och Si^{30}. De genom det radioaktiva sönderfallet bildade Si^{30}-kärnorna få därför anses utgöra omvandlingsprocessens stabila slutprodukt.

CURIE och JOLIOT kunde också på kemisk väg förskaffa sig ett belägg för antagandet, att den efter Al-bestrålningen konstaterade positronemissionen härrörde från fosforatomer. Deras tillvägagångssätt var härvid följande: Ett tunt Al-blad utsattes för ett intensivt bombardement av α-partiklar, därigenom att det placerades i omedelbar närhet av ett Po-preparat. Därefter löstes det bestrålade Al-bladet i saltsyra. Härvid frigjordes väte. De förmodade atomerna av den radioaktiva fosforisotopen P^{30} måste med vätet bilda fosforväte, PH_3, och därför bortgå i gasform. CURIE och JOLIOT konstaterade också, att den bortgående gasen var bärare av radioaktiviteten, medan återstoden visade sig vara inaktiv.

Även efter bestrålning av B och Mg med α-partiklar konstaterade de båda forskarna, såsom nyligen framhållits, spontan emission av positiva elektroner. Den vid B-bestrålningen uppkomna radioaktiva isotopen är enligt CURIE och JOLIOT N^{13} (radiokväve), ett antagande som verifierades genom en kemisk behandling av det bestrålade B-preparatet, analog den vid Al företagna. Den positronemitterande atomart, som uppkommer vid Mg-bestrålningen anse CURIE och JOLIOT vara kiselisotopen Si^{27} (radiokisel).

Liksom de naturligt radioaktiva elementen låta sig dessa på konstlad väg bildade radioelement karakteriseras av en halveringstid (= den tid, som åtgår för att hälften av de ursprungligen förhandenvarande atomerna skola sönderfalla). CURIE och JOLIOT funno halveringstiden för α-bestrålat bor vara 14 minuter, för magnesium 2,5 minuter och för aluminium 3,3 minuter.

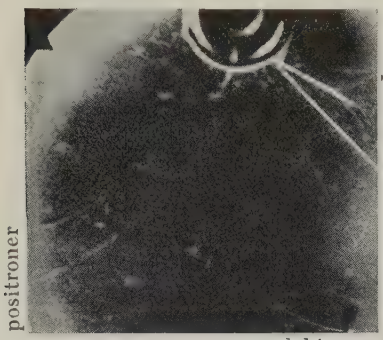


Fig. 1. Emission av protoner samt positiva och negativa elektroner från Al under α-partikelbombardement.

CURIES och JOLIOTS försök ha senare upprepats och verifierats av flera forskare. Figg. 1—2 återge några av L. MEITNER i Berlin-Dahlem upptagna Wilsonfotografier,[1] utvisande resultatet av ett α-bombardement av aluminium. I kammaren var insatt en cylindrisk Al-hylsa (synlig upptill i figurerna), inuti vilken det α-emitterande Po-preparatet kunde anbringas. Fig. 1 återger en upptagning gjord med insatt Po-preparat. Banorna av två protoner, utlösta ur Al-kärnorna genom α-bombardementet (formel I, s. 6), framträda tydligt på bilden; de båda mot figurens vänstra kant förlöpande, krökta banorna härröra från positiva elektroner[2] (formel II b, s. 7; neutronerna, som enligt formeln II a jämväl utsändas, framträda icke i Wilsonkammaren[3]). På figuren synas vidare svaga spår av två åt höger avböjda banor. Dessa härröra från negativa elektroner, som utlösts ur Al-atomernas elektronhöljen av den γ-strålning, som

[1] Se not 2, sid. 3.

[2] Banornas krökta form beror på, att kammaren befann sig i ett magnetiskt fält, härrörande från en kring den cylindriska kammaren lindad strömförande spole.

[3] Jfr uppsatsen i årg. *17*, s. 82—83.

Po-preparatet jämte α-strålningen utsänder. Dessa elektroner ha alltså ej med emissionen från Al-kärnorna att skaffa. Wilsonupptagningarna i figg. 2 a och b ha upptagits 5 sekunder resp. 9 min. efter det Po-preparatet borttagits ur Al-hylsan. Figurerna visa endast sönderfallet enligt schemat II b (positroner).

Utom vid B, Mg och Al ha olika forskare konstaterat uppkomst av radioaktiva element efter α-partikelbombardement

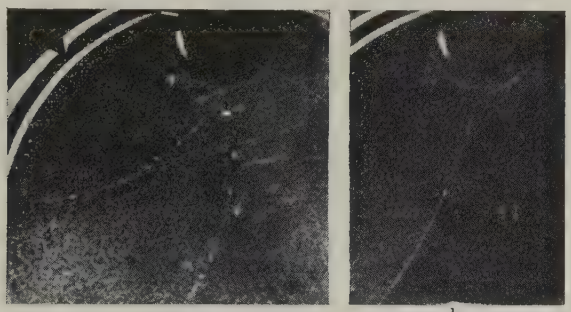


Fig. 2. Emission av positiva elektroner från Al a) 5 sek, b) 9 min. efter α-partikelbombardementets upphörande.

även vid vissa andra av de lättare elementen såsom Li, N, F, Na och P.

Curie och Joliot uttalade redan i ett av sina första arbeten den förmodan, att de nya radioaktiva isotoperna torde kunna åstadkommas även på annat sätt än genom α-partikelbombardement. Så har även visat sig vara fallet. Man har sålunda hos några av de lättare elementen konstaterat uppkomst av instabila atomarter efter bombardement med såväl starkt accelererade protoner som med snabba deutoner.[1] Det är i främsta rummet vid Rutherford's laboratorium i Cambridge och av några amerikanska forskare som den genom proton- och deutonbombardement inducerade radioaktiviteten studerats.

[1] Kärnorna av den nyligen upptäckta tunga väteisotopen $_1H^2$.

3. Uppkomst av radioaktiva element genom neutronbestrålning.

Genom bombardement med elektriskt laddade korpuskler (α-partiklar, protoner, deutoner) har man hittills med säkerhet kunnat åstadkomma omvandlingsprocesser endast i fråga om de lättare elementen, där på grund av den ringa kärnladdningen den på korpuskeln verkande coulombska repulsionskraften är relativt liten. På sistone har man emellertid i den oladdade neutronen funnit ett utomordentligt hjälpmedel för åstadkommande av omvandlingar av även de tyngre elementens kärnor. Under loppet av föregående år har sålunda E. Fermi och hans medarbetare med utomordentlig framgång förmått åstadkomma elementomvandlingar och skapa en mängd nya radioaktiva atomarter genom neutronbombardement. De italienska forskarna ha bestrålat omkring 70 av grundämnena från det lättaste, väte, upp till det tyngsta, uran, och funnit, att mer än hälften av dessa efter neutronbombardementets upphörande utsända en korpuskularstrålning, vars intensitet minskas exponentiellt med tiden. Genom Wilsonupptagningar i magnetfält eller på annat sätt undersöktes vid ett flertal av elementen strålningens karaktär närmare. Denna undersökning visade, att den genom neutronbombardementet utlösta spontana korpuskelemissionen ej bestod av positiva utan av negativa elektroner (β-partiklar). I ett flertal fall kunde även Fermi genom en kemisk behandling av den bestrålade substansen sluta sig till det radioaktiva elementets art. En dylik undersökning av exempelvis neutronbestrålat svavel tydde på att den uppkomna β-strålande atomarten här var en fosforisotop. De italienska forskarna antaga därför reaktionsförloppet vara följande: [1]

$$
\begin{array}{l}
{}_{16}S^{32} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{15}P^{32} + {}_{1}H^{1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_{16}S^{32} + {}_{-1}e
\end{array}
$$

[1] Av svavel känner man tre *stabila* isotoper S^{32}, S^{33} och S^{34}, av vilka S^{32} är den vanligaste (av 100 S-atomer äro i medeltal 97 isotopen S^{32}).

vilket betyder, att neutronen stannar i kärnan, medan en proton bortspränges; den instabila P^{32}-atomen övergår under emission av en β-partikel i den stabila S^{32}. Det radioaktiva sönderfallet förlöper med en halveringstid av 14 dagar.

Av speciellt intresse är det förhållandet, att FERMI hos två eller tre angränsande element ibland konstaterar samma halveringstid (jfr tab. 2, s. 13). Så är exempelvis förhållandet hos vanadin, krom och mangan, vilka alla tre efter neutronbombardementets upphörande emittera β-strålar med halveringstiden 3,75 minuter. FERMI förmodar därför, att den β-sönderfallande atomarten i de tre fallen är densamma. Resultaten av den kemiska undersökning som FERMI företog vid krom och mangan tydde på, att den radioaktiva atomarten är en vanadinisotop. FERMI anser denna vara V^{52} och reaktionsförloppen följande [1]:

$$\left.\begin{array}{l} {}_{23}V^{51} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{23}V^{52} \\ {}_{24}Cr^{52} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{23}V^{52} + {}_{1}H^{1} \\ {}_{25}Mn^{55} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{23}V^{52} + {}_{2}He^{4} \end{array}\right| \quad {}_{23}V^{52} \rightarrow {}_{24}Cr^{52} + {}_{-1}e$$

I samtliga fallen stannar projektilen i kärnan, från Cr bortspränges en proton, från Mn en α-partikel. Den stabila slutprodukten blir kromisotopen Cr^{52}.

Å andra sidan konstaterade de italienska forskarna i ett flertal fall vid ett och samma element mera än *en* halveringstid (jfr tab. 2). Om det bestrålade elementet innehåller två olika isotoper, såsom exempelvis brom (Br^{79} och Br^{81}), kan existensen av två olika halveringstider förklaras så, att det genom neutronbombardementet bildas två olika radioaktiva kärnor, en ur den lättare och en annan ur den tyngre isotopen. Märkligare är det däremot att exempelvis aluminium, vilket består av endast *en* atomart, Al^{27}, emitterar β-strålar av ej mindre än tre olika halveringstider. Detta för-

[1] Av vanadin, liksom av mangan känner man blott *en* stabil atomart, V^{51} resp. Mn^{55}, av krom däremot fyra: Cr^{50}, Cr^{52}, Cr^{53} och Cr^{54}. Av dessa är Cr^{52} den rikligast förekommande (av 100 Cr-atomer äro i medeltal 82 isotopen Cr^{52}).

hållande förklarar FERMI så, att det vid stötprocesserna mellan neutronerna och Al^{27}-kärnorna uppkomma tre olika radioaktiva atomarter. Dessa synas vara Na^{24}, Mg^{27} och Al^{28}, vilka genom neutronbombardementet uppkomma enligt följande formler:

$$_{13}Al^{27} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{11}Na^{24} + {}_2He^4$$
$$_{13}Al^{27} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{12}Mg^{27} + {}_1H^1$$
$$_{13}Al^{27} + {}_0n^1 \rightarrow {}_{13}Al^{28}$$

De radioaktiva isotoperna övergå under spontan emission av β-partiklar i de stabila Mg^{24} resp. Al^{27} och Si^{28}:

$$_{11}Na^{24} \rightarrow {}_{12}Mg^{24} + {}_{-1}e$$
$$_{12}Mg^{27} \rightarrow {}_{13}Al^{27} + {}_{-1}e$$
$$_{13}Al^{28} \rightarrow {}_{14}Si^{28} + {}_{-1}e$$

De motsvarande halveringstiderna äro 15 tim., resp. 10 min. och 2,3 min.

Tabell 2 innehåller en sammanställning av de väsentligaste av försöksresultaten över radioaktivitet inducerad genom neutronbestrålning.

Av de många genom neutronbombardement åstadkomna radioaktiva substanserna är uran av speciellt intresse. FERMI anser nämligen, att vid neutronbestrålning av U uppkomma radioaktiva element med högre ordningstal än 92. Icke mindre än fyra olika halveringstider (15 sek., 40 sek., 13 min. och 100 min.), svarande mot fyra olika atomarter, kunde konstateras i den radioaktiva strålning, som U utsände efter neutronbombardementets upphörande. En kemisk undersökning av det bestrålade U-preparatet visade, att den aktiva beståndsdelen med halveringstiden 13 min. var besläktad med mangan och rhenium och vidare ej kunde vara någon isotop vare sig till uran självt eller till något av de uran närmast föregående elementen i det periodiska systemet. Detta ledde FERMI till antagandet, att 13-minuters-substansen är det med mangan och rhenium homologa elementet med ordningstalet 93.

Tabell 2.

Uppkomst av radioaktiva atomarter genom neutronbestrålning.[1]

Bestrålat element	Halveringstid	Radioaktiv isotop	Bestrålat element	Halveringstid	Radioaktiv isotop
9 F	9s; 40s	N^{16}?; Ne^{23}?	35 Br	18m; 4,2t	Br^{80}; Br^{82}
11 Na	40s; 15t	Ne^{23}?; Na^{24}	42 Mo	30m; 36t	
12 Mg	40s; 10m; 15t	Ne^{23}?; Mg^{27}; Na^{24}	45 Rh	44s; 3,9m	
13 Al	2,3m; 10m; 15t	Al^{28}; Mg^{27}; Na^{24}	46 Pd	15m; 12t	
14 Si	2,3m; 2,4t	Al^{28}; Si^{31}	47 Ag	22s; 2,3m	—; Ag
15 P	2,3m; 2,4t	Al^{28}; Si^{31}	49 In	13s; 54m; 3t?	—; In; In
16 S	14d	P^{32}	51 Sb	2,5d	Sb
17 Cl	35m; 14d	Cl; P^{32}	52 Te	45m	
19 K	16t	K^{42}	53 J	25m	J^{128}
21 Sc	16t	K^{42}	56 Ba	3m; 80m	—; Ba
22 Ti	3m		59 Pr	5m; 19t	
23 V	3,75m	V^{52}	60 Nd	1t	
24 Cr	3,75m	V^{52}	62 Sm	40m	
25 Mn	3,75m; 2,5t	V^{52}; Mn^{56}	64 Gd	8t	
26 Fe	2,5t	Mn^{56}	74 W	1d	W
27 Co	2,5t	Mn^{56}	75 Re	20t	Re
29 Cu	5m; 10t	Cu; Cu	77 Ir	19t	Ir
30 Zn	5m; 10t	Cu; Cu	78 Pt	50m	
31 Ga	20m; 23t	Ga; —	79 Au	2,7d	Au
33 As	26t	As^{76}	90 Th	1m; 24m	
34 Se	35m	Se	92 U	15s; 40s; 13m; 100m	

Fermis tydning av 13-minuters-produkten har senare kritiserats av tvenne amerikanska forskare (A. v. Grosse o. M. S. Agruss), vilka anse den aktiva substansen vara en isotop till elementet 91 (protaktinium). Denna tydning avvisas emellertid i tvenne nyligen (jan. 1935, april 1935) publicerade arbeten av O. Hahn och L. Meitner, som vid Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie i Berlin-Dahlem utfört synnerligen ingående fysikaliska och kemiska undersökningar av Fermis såväl 13-minuters- som 100-minutersubstanser. Hahn och Meitner draga ur sina försöksresultat den slutsatsen, att ingendera av de båda substanserna kan vara någon isotop till element mellan 80 Hg och 92 U, möjligen med undantag av elementet 85 (ekajod), ett förhållande som enligt deras mening gör det högst sannolikt, att såväl

[1] Enligt E. Fermi: Proc. Roy. Soc., London, A 149, s. 554—57, 1935.

Tabell 3.

Radioaktiva isotoper bildade genom α-bombardement eller neutronbestrålning.

Isotop		Radioaktiv strålning	Halverings-tid	Bestrålat element	Projektil [1]	Slut-produkt
$_5B^9$ $_5B^{10, 11}$	s	Pos. elektroner	några min.	Li	α	$_4Be^9$
$_7N^{13}$ $_7N^{14, 15}$	s	Pos. elektroner	14m	B	α	$_6C^{13}$
$_9F^{17}$ $_9F^{19}$	s	Pos. elektroner	1,2m	N	α	$_8O^{17}$
$_{10}Ne^{20,21,22}$ $_{10}Ne^{23}$	s	Neg. elektroner	40s	F, Na, Mg	n, n, n	$_{11}Na^{23}$
$_{11}Na^{22}$	s	Pos. elektroner	mycket kort	F	α	$_{10}Ne^{22}$
$_{11}Na^{23}$ $_{11}Na^{24}$		Neg. elektroner	15t	Na, Mg, Al	n, n, n	$_{12}Mg^{24}$
$_{12}Mg^{24,25,26}$ $_{12}Mg^{27}$	s	Neg. elektroner	10m	Mg, Al	n, n	$_{13}Al^{27}$
$_{13}Al^{26}$	s	Pos. elektroner	7s	Na	α	$_{12}Mg^{26}$
$_{13}Al^{27}$ $_{13}Al^{28}$		Neg. elektroner	2,3m	Mg,Al,Si,P	α, n, n, n	$_{14}Si^{28}$
$_{14}Si^{27}$	s	Pos. elektroner	2,5m	Mg	α	$_{13}Al^{27}$
$_{14}Si^{28, 29, 30}$ $_{14}Si^{31}$		Neg. elektroner	2,4t	Si, P	n, n	$_{15}P^{31}$
$_{15}P^{30}$	s	Pos. elektroner	3,3m	Al	α	$_{14}Si^{30}$
$_{15}P^{31}$ $_{15}P^{32}$		Neg. elektroner	14d	S, Cl	n, n	$_{16}S^{32}$
$_{17}Cl^{34}$ $_{17}Cl^{35, 37}$	s	Pos. elektroner	40m	P	α	$_{16}S^{34}$
$_{19}K^{39, 41}$	s	Neg. elektroner	16t	K, Sc	n, n	$_{20}Ca^{42}$
$_{19}K^{42}$						
$_{23}V^{51}$	s	Neg. elektroner	3,75m	V, Cr, Mn	n, n, n	$_{24}Cr^{52}$
$_{23}V^{52}$						
$_{25}Mn^{55}$	s	Neg. elektroner	2,5t	Mn, Fe, Co	n, n	$_{26}Fe^{56}$
$_{25}Mn^{56}$						

[1] α = α-partikel, n = neutron.

13-minuters som 100-minuters-produkterna äro element med högre ordningstal än 92.

4. De nya radioaktiva isotoperna.

Numera känner man ett stort antal på konstgjord väg bildade instabila atomkärnor fördelade över hela det periodiska systemet. Hos de lättare elementen fram till 26 Fe har man sålunda under det senaste året kunnat framställa bortåt 20 nya isotoper, vilka på grund av deras instabila karaktär ej förekomma i naturen. Tabell 3 innehåller en sammanställning av dessa. I tabellen äro även de från isotopforskningen bekanta stabila isotoperna av ifrågavarande element införda. Dessa senare äro i 2:dra kolumnen betecknade med bokstaven s.

Tabellen visar, att ett flertal av de instabila atomarterna kunna framställas på mera än *ett* sätt. Sålunda uppkommer den β-emitterande Al^{28} dels genom α-bombardement av Mg,[1] dels genom neutronbestrålning av elementen Al, Si och P. Även genom deutonbombardement av Al har samma isotop nyligen framställts. Uppgifterna i kolumnerna 1—3 kunna tydligen sammanfattas i följande regel: de instabila isotoper, som ha mindre massa än de stabila, utsända positiva elektroner, de med större massa emittera negativa elektroner. Detta kan tydas så, att anomalt små eller anomalt stora värden å kvoten *atomvikt* : *kärnladdning* sträva efter att antaga mera normala värden.

[1] Mg bombarderat med α-partiklar utsänder alltså utom positroner (jfr sid. 7) även negativa elektroner. De förra härröra enligt Curie och Joliot från Si^{27}, vilken genom α-bestrålningen bildas ur magnesiumisotopen Mg^{24}. Den β-emitterande Al^{28} antages uppkomma ur Mg^{25}.

Några nyare undersökningar över absorptionslinjerna inom stjärnspektra.

Av ÅKE WALLENQUIST.

I en föregående uppsats i denna tidskrift (»Om stjärnornas strålning», årg. *16,* s. 157, 1933) har förf. behandlat en del undersökningar, baserade på intensitetsfördelningen inom det kontinuerliga spektret hos stjärnor. I föreliggande artikel komma en del slutsatser i korthet att antydas, vilka kunna erhållas ur en mer ingående analys av absorptionslinjernas intensitet och form inom stjärnspektra.

1. Linjerna i stjärnspektra ha sitt ursprung inom stjärnatmosfären, d. v. s. det gashölje av lägre temperatur och tryck, som lagrar sig över fotosfären, vars intensiva ljus ger upphov till det kontinuerliga stjärnspektret. Spektrallinjernas allmänna utseende, deras intensitet och form, beror i första hand på det fysiska tillståndet inom sagda gashölje. Detta tillstånd bestämmes dels av jonisationsjämviktens ekvation, vilken ger oss en relation mellan tryck och temperatur, vari som parametrar ingå jonisationsgraden och jonisationspotentialen [1] för de ämnen, som uppbygga stjärnatmosfären, samt dels av den atmosfäriska jämviktsekva-

[1] Jonisering kan antingen framkallas genom bestrålning med ljus av våglängder kortare eller lika med en viss våglängd eller genom stötar. Den för joniseringen nätt och jämt erforderliga energien kallas joniseringsenergien eller joniseringspotentialen. Den utttryckes i allmänhet i volt. Som exempel kan nämnas, att ett ljuskvantum med energien 5 volt svarar mot en våglängd av 2468 Å. E. Så kortvågig strålning erfordras således för att jonisera en atom med joniseringspotentialen 5 volt.

tionen, som likaledes ger ett samband mellan tryck och temperatur inom stjärnatmosfären. I den sistnämnda relationen uppträda som parametrar absorptionskoefficienten hos gasblandningen, effektiva temperaturen och tyngdkraftens acceleration.

2. Vid en exakt bestämning av en spektrallinjes struktur komma endast fotografiska undersökningar i fråga. Antingen fotograferas stjärnan med tillhjälp av objektivprisma eller medelst spektrograf, varefter de på så sätt erhållna stjärnspektra »registreras» med tillhjälp av en mikrofotometer. I detta fall erhålles en grafisk framställning av

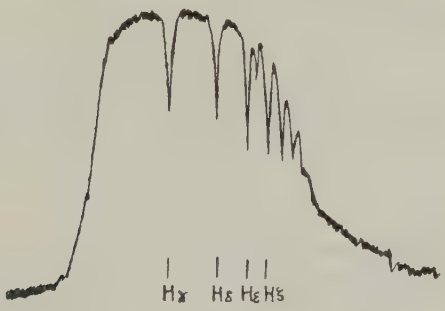


Fig. 1.

spektrum, vilken sedan kan läggas till grund för mera ingående undersökningar angående spektrallinjernas intensitet och allmänna utseende. Fig. 1 visar ett svärtningsdiagram av en A-stjärna, upptaget med tillhjälp av en självregistrerande mikrofotometer. (Efter Y. Öhman.)

Fig. 2 anger schematiskt en spektrallinjes utseende. Som abscissa har avsatts våglängden och som ordinata den motsvarande intensiteten. Den övre horisontella linjen anger registreringen för fullständig svärtning, medan den undre linjen ger registreringen för glasklar plåt.

Vid bestämning av en spektrallinjes *intensitet* jämföres denna lämpligast med intensiteten hos det kontinuerliga spektret, som överspänner linjen. Dess *djup* mäter ljus-

förlusten i linjens centrum och dess *form* eller *kontur* anger, hur intensiteten avtager från det kontinuerliga spektret successivt mot linjens centrum. Ytan, som inneslutes av spektrallinjens kontur, ger slutligen ett mått på *linjens totala absorption,* alltså den ljusmängd, det kontinuerliga spektret förlorat genom uppträdandet av spektrallinjen.

3. Enligt en av A. Unsöld uppställd teori, kan förloppet vid absorptionslinjernas uppkomst tänkas vara följande. Nedifrån fotosfären inträngер kontinuerlig strålning i stjärnatmosfären. Av denna fotosfärstrålning absorberar atomerna

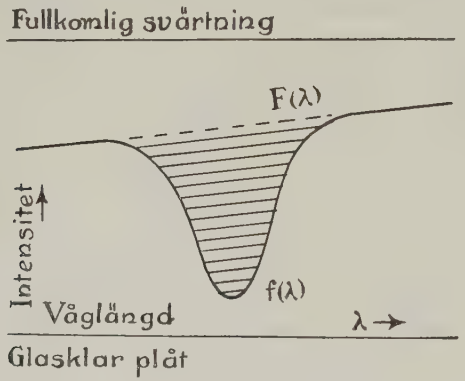


Fig. 2.

i atmosfärens lägre skikt bestämda kvanta, beroende på atomslaget, för att omedelbart återemittera strålningen i alla riktningar. En del av den emitterade strålningen återgår till fotosfären, medan en annan del emitteras till de omgivande atomerna och till de atomer, som tillhöra närmast högre skikt av atmosfären. Dessa absorbera i sin tur en del av strålningen, för att omedelbart emittera den åt alla sidor liksom det föregående atomskiktet. Samma process utspelas av de successiva atomskikten, varvid en del av strålningen återgår till fotosfären, medan en annan del söker sig utåt. (Förloppet påminner starkt om tvenne gasers blandning genom diffusion.) Den del av fotosfärstrålningen, som

ej absorberas av atmosfärens atomer, fortplantar sig ostört och ger upphov till det kontinuerliga stjärnspektret, medan den del av strålningen, som på antytt sätt hämmas av atomerna, ger upphov till absorptionslinjerna inom stjärnspektrum.

Det är nu tydligt att den kvantitet strålning, som på detta sätt hämmas (»sprides») av stjärnatmosfären, beror på antalet atomer, som strålningen möter på vägen utåt. Är antalet atomer per cm^3 av ett visst atomslag N och atmosfärens höjd H, blir antalet atomer, som strålningen måste genomtränga, innan den når atmosfärens yttersta gräns, $H \,.\, N$.

Kallas fotosfärljusets intensitet vid våglängden $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$ för $F(\lambda)$ och är den ur stjärnatmosfären utträdande strålningens intensitet för samma våglängd $f(\lambda)$, ger differensen mellan dessa båda kvantiteter ett mått på den av linjen förorsakade absorptionen. Vi ha således

$$F(\lambda) - f(\lambda) = f(\lambda) \,.\, s \,.\, H, \qquad (1)$$

där s betyder »spridningskoefficienten». Kallas våglängden för linjens centrum λ_0, har spridningskoefficienten enligt Undsölds teori följande form

$$s = k \,.\, \frac{\lambda_0^{\,2} \,.\, N \,.\, f}{(\lambda - \lambda_0)^2}, \qquad (2)$$

där k är en konstant, och f d. s. k. »oscillatorstyrkan», som kan bestämmas ur kvantumteoretiska betraktelser.

Genom en enkel omtransformering av ekv. (1), erhålles följande uttryck för linjekonturen i dess enklaste form:

$$\frac{f(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{1}{1 + s \,.\, H}. \qquad (3)$$

Ur spektrum erhålles omedelbart kvantiteterna $F(\lambda)$ och $f(\lambda)$, varvid ekvationens enda obekanta är $N \,.\, H$ eller det totala antalet atomer inom en cylinder med en cm^2:s genom-

skärning och av höjden H, vilket förorsakar den ifrågavarande absorptionslinjen.

Vi kunna således ur ett studium av linjekonturer och med tillhjälp av UNSÖLDs teori *kvantitativt* bestämma sammansättningen av en stjärnatmosfär.

I praktiken söker man genom att antaga olika värden på $H \,.\, N$ bestämma den teoretiska linjekontur, som närmast överensstämmer med den observerade. — Fig. 3 visar konturen hos absorptionslinjen $H\beta$ inom stjärnan ε Aurigae,

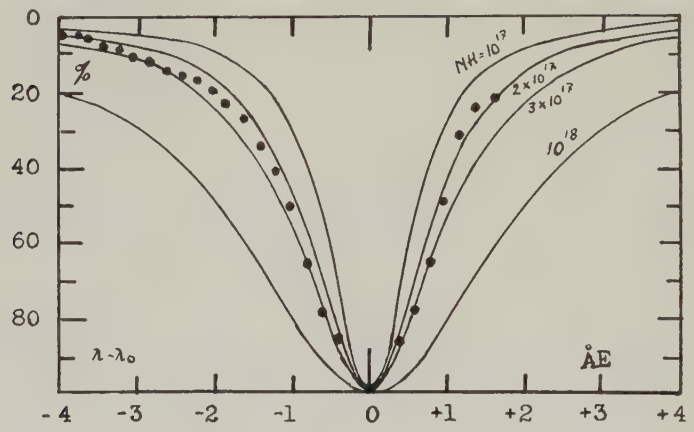


Fig. 3.

enligt O. STRUVEs och C. T. ELVEYS undersökningar (prickade linjen), samt fyra teoretiska konturer, härledda enligt UNSÖLDs teori för olika värden på $H \,.\, N$.

4. Tvenne effekter kunna emellertid deformera den teoretiska linjekonturen, nämligen dels Stark-effekten och dels en Dopplereffekt, som förorsakas av stjärnans rotation.

Stark-effekten beror på det elektriska fältet inom stjärnatmosfären, som förorsakas av de elektriskt laddade jonerna och elektronerna inom denna. I stjärnspektra uppenbarar sig Stark-effekten som en breddning av spektrallinjerna och förflackning av konturen. Stark-effekten inverkar emellertid mest på linjer, härstammande från element med lågt

atomtal, t. ex. vätgas och helium. Om den starka breddningen av vätgaslinjerna, som man observerat hos stjärnor av tidigare spektralklass, endast kan tillskrivas en Stark-effekt, måste fältstyrkan hos det elektriska kraftfältet inom stjärnatmosfären vara av storleksordningen 10^3—10^4 volt per cm.

5. Deformeringen av linjekonturen, beroende på stjärnans axelrotation, gör sig inte företrädesvis gällande hos

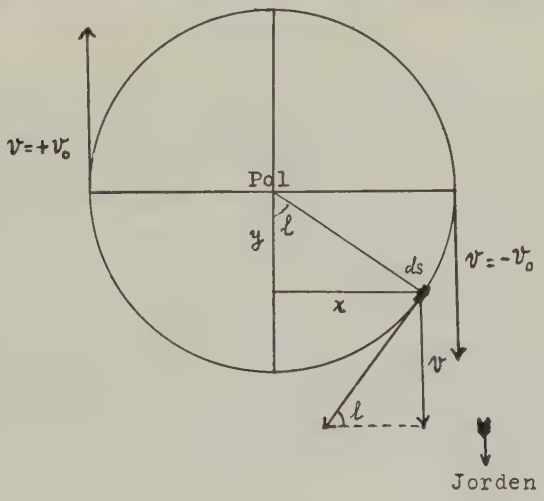


Fig. 4.

linjer, som härstamma från element av lågt atomtal, utan influerar i lika grad samtliga linjer i stjärnspektrum. Fenomenet har studerats av Shajn, Struve, Elvey m. fl.

Rotationen åstadkommer en symmetrisk breddning av linjerna i den händelse stjärnan är sfärisk. Shajn och Struve ha studerat rotationseffekten hos en sfärisk stjärna, vars rotationsaxel antages vara vinkelrät mot synlinjen.

Vi betrakta ett ytelement *ds* av stjärnan, vars rätvinkliga koordinater, hänförda till den apparenta stjärnskivans centrum (jfr. fig. 4) och uttryckta i stjärnans radie som enhet äro x och y. Betecknar l längden och b latituden,

erhålles — om stjärnans radie är 1 — följande relation mellan elementets rätvinkliga och sfäriska koordinater:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos b \,.\, \sin l \\ y &= \sin b \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Är rotationshastigheten vid ekvatorn v_0, inses omedelbart, att den hos ytelementet observerade radialhastigheten (sål. rotationshastighetens komponent i synlinjens led) blir

$$v = v_0 \cos b \sin l. \tag{5}$$

M. a. o., alla punkter på stjärnskivan med samma x-koordinat ha identiska radialhastigheter.

Beteckna I_0 och λ_0 resp. intensiteten och våglängden för en spektrallinjes centrum, kan dess kontur enligt SHAJN och STRUVE framställas under formen

$$I = I_0 e^{-\varkappa^2 (\lambda - \lambda_0)^2}, \tag{6}$$

där $\varkappa$ är en konstant, som varierar från linje till linje.

Om stjärnan roterar, blir för en godtycklig punkt på skivan (ytelementet ds) enligt Dopplers princip spektrallinjens centrum förskjutet med beloppet

$$\lambda'_0 - \lambda_0 = \pm \lambda_0 \frac{v}{c}, \tag{7}$$

där λ_0' betecknar den förskjutna våglängden och c är ljushastigheten. Införes detta värde i ekv. (6), erhålles följande uttryck för linjekonturen vid rotation:

$$I = I_0 e^{-\varkappa^2 \left[\lambda - \lambda_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\right]^2}. \tag{8}$$

Denna ekv. gäller endast för det betraktade ytelementet. Vad vi observera, är emellertid resultatet av den kombinerade rotationseffekten för hela stjärnytan. Uttrycket (8) måste således integreras över samtliga ytelement $ds = dx\, dy$.

Då emellertid enl. ekv. (4) och (5) x och v/v_0 äro ekvivalenta, erhålles följande uttryck för integralen:

$$I'_1 = I'_0 \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{y} e^{-\varkappa^2 \left[\lambda - \lambda_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\right]^2} dv\, dy. \qquad (9)$$

Enär vidare, som lätt inses, $y = \sqrt{1 - v^2}$, erhålles slutligen ekv.:

$$I'_1 = I'_0 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - v^2}\, e^{-\varkappa^2 \left[\lambda - \lambda_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\right]^2} dv, \qquad (10)$$

vilken kan integreras numeriskt. Denna ekvation framställer linjekonturen för en roterande stjärna i dess enklaste form.

I praktiken förfares på följande sätt vid bestämning av en stjärnas axelrotation ur linjekonturer. Man utväljer sådana linjer, vilkas konturer på förhand kunnat bestämmas med tillhjälp av stjärnor, som sakna påvisbar rotation (antingen beroende på att denna är för långsam för att kunna observeras eller på grund av att rotationsaxeln sammanfaller med synlinjen); ur dessa kan $\varkappa$ härledas. Under antagande av olika ekvatoreala rotationshastigheter beräknas med tillhjälp av ekv. (10) den störda linjekonturen. Stjärnans rotation erhålles sedan ur det värde, för vilket den observerade och beräknade linjekonturen bäst överensstämma.

Figur 5 visar enligt Elvey, hur rotationen deformerar en spektrallinje vid olika rotationshastigheter. Abskissan är våglängden uttryckt i ÅE och ordinatan anger den i linjen absorberade strålningen i procent av det kontinuerliga spektrets intensitet. Den streckade linjen representerar den av rotationseffekten ostörda linjekonturen.

På grund av instrumentella svårigheter kunna vi för närvarande knappast observera en rotationseffekt mindre än omkr. 25 km/sek. Den hastigast roterande stjärnan (α Aquilae) har en rotation, som uppgår till det tiodubbla av

detta belopp. (Solens rotation uppgår endast till 2 km/sek.) Då stjärnans axellutning mot synlinjen är obekant, inses

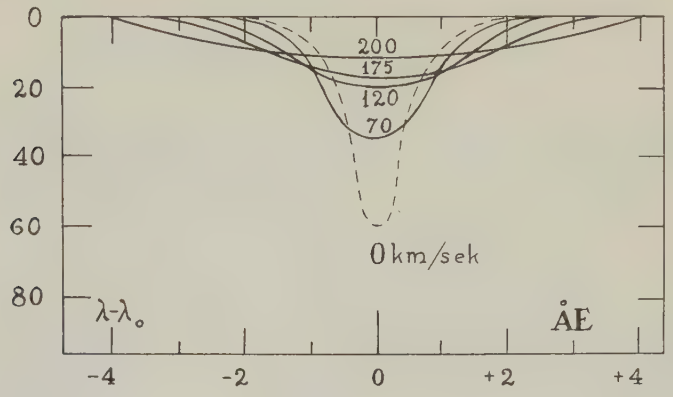


Fig. 5.

lätt, att de observerade rotationsvärdena endast äro minimivärden. I de flesta fall är den sanna rotationen större än den observerade.

Bosscha-Sterrenwacht, Lembang (Java), sept. 1934.

Demonstration av jämviktsförskjutning i ett homogent system.

Av G. STARCK.

Försök, som illustrera jämviktsförskjutningar i lösningar och i heterogena system, råder det ej brist på, men motsvarande försök med gasformiga system, lämpade för demonstration, ha hittills varit åtminstone författaren obekanta. Nedan beskrivna experiment har tillkommit för att fylla denna brist.

Det gäller reaktionen mellan kväveoxid, syre och kvävedioxid:

$$2\,NO + O_2 \rightleftarrows 2\,NO_2,$$

som har mätbara jämviktslägen inom det ungefärliga temperaturintervallet 150—600°; bildningen av NO_2 ger sig tillkänna genom gasblandningens bruna färg, som blir starkare, ju mera reaktionen förskjutes åt höger. En bildning av N_2O_4 behöver man vid dessa temperaturer ej taga i beräkning, ännu mindre en bildning av N_2O_3. Reaktionen är ett ganska lätt demonstrerat exempel på en jämviktsförskjutning, då koncentrationen av en komponent ändras. En ökning av koncentrationen, resp. trycket av de färglösa gaserna, enklast syrets, bör medföra en förskjutning åt höger, d. v. s. en förstärkning av gasblandningens färg. Även den förskjutning, som en temperaturändring medför, kan demonstreras vid försöket.

Bodenstein och Katayama ha undersökt reaktionen, och deras mätningar återges av formeln

$$\log K_p = -\frac{5749}{T} + 1.70 \log T - 5 \cdot 10^{-4} \cdot T + 2.839,$$

där $K_p = \frac{p^2_{NO} \cdot p_{O_2}}{p^2_{NO_2}}$ (p uttryckt i atmosfärer).

Härav beräknas följande värden av $\log K_p$:

Tabell 1.

$T =$	600	700	800	900	1000
$\log K_p =$	— 2.320	— 0.887	+ 0.190	+ 1.022	+ 1.690

I och för val av lämplig försökstemperatur gjordes följande beräkningar.

Antag, att i en jämviktsblandning av endast NO, O_2 och NO_2 det totala trycket är 1 atm.; då är

$$p_{NO} + p_{O_2} + p_{NO_2} = 1.$$

Om man utgått från rent NO_2, är

$$p_{NO} = 2\, p_{O_2} \text{ och } p_{O_2} = \frac{1 - p_{NO_2}}{3}.$$

Vid insättning i jämviktsekvationen erhålles

$$K_p = \frac{4 \cdot (1 - p_{NO_2})^3}{27 \cdot p^2_{NO_2}} \text{ och}$$

$$p^3_{NO_2} + \left(\frac{27\, K_p}{4} - 3\right) \cdot p^2_{NO_2} + 3\, p_{NO_2} - 1 = 0.$$

I sifferkoefficienten för den kvadratiska termen insattes värden på K_p, som åt densamma gåvo enkla heltalsvärden (och värdet 0), varpå ekvationerna löstes genom approximering. Härvid erhöllos följande värden på p_{NO}, p_{O_2} och p_{NO_2}:

Tabell 2.

K_p	log K_p	p_{NO}	p_{O_2}	p_{NO_2}	T	t
4/9	— 0.3521	0.452	0.226	0.322	747	474
8/9	— 0.0511	.494	.247	.260	775	502
4/3	+ 0.1250	.516	.258	.227	792	519
52/27	+ 0.2846	.534	.267	.199	809	536
92/27	+ 0.5324	.560	.280	.160	838	565
172/27	+ 0.8041	.584	.292	.125	872	599

De mot K_p-värdena svarande temperaturerna ha erhållits ur tabell 1 genom grafisk interpolation.

Om syrgastrycket ökas med 0.5 atm., får jämviktsekvationen formen

$$K_p = \frac{(p_{NO} - 2x)^2 \cdot (p_{O_2} + 0.5 - x)}{(p_{NO_2} + 2x)^2},$$

där x är den genom jämviktsförskjutningen inträdande minskningen i syrgastrycket. För den högsta temperaturen i ovanstående tabell, $T = 872$, $K_p = 6.370$, övergår ekvationen till

$$x^3 + 6.158\,x^2 + 1.344\,x - 0.04275 = 0, \text{ som satisfieras av}$$

$$x = 0.0315.$$

Trycket av NO_2 stiger sålunda med 0.063 atm., d. v. s. med 50 % (från 0.125 atm.).

Motsvarande beräkning för den lägsta av tabellens temperaturer, $T = 747$, $K_p = 0.444$, ger

$$x^3 + 0.1205\,x^2 + 0.545\,x - 0.00281 = 0,$$

$$x = 0.0052.$$

NO_2-trycket stiger i detta fall med 0.0101 atm. = 3 % (från 0.322 atm.). Försöket skall således för att ge en betydande ökning av detta tryck utföras vid hög temperatur, ett resultat, som är på förhand klart även utan ovanstående beräkningar.

Försöket utföres på följande sätt. Apparaten utgöres av ett i båda ändar tillsmält pyrexglasrör, 40 mm vitt, 250 mm

långt, på mitten försett med ett ansatsrör för gasernas in- och utförande. Rörets ändar böra vara jämnt blåsta för att vid genomlysning (se nedan) ge en så felfri ljusfläck som möjligt. Till apparaten hör en 3-vägskran, helst fast monterad på stativ. Med dess hjälp kan röret dels evakueras, dels fyllas med NO_2, dels kan härigenom syrgas införas.

Rörets upphettning sker med en radbrännare, antingen med röret liggande öppet i luften eller, i syfte att få en jämnare temperaturfördelning, med röret inlagt i ett av asbest förfärdigat litet luftbad, vars gavlar ha runda öppningar av samma vidd som röret, och vars botten har en längsgående springa av ca. 15 mm bredd för låggaserna.

Reaktionen kan iakttagas i det öppet liggande röret, bäst vid betraktande i längdriktningen. Vid demonstration för en klass är det lämpligare att belysa det i luftbadet inlagda röret i längdriktningen och med en lins samla ljuset till en för klassen synlig ljusfläck på en skärm.

Röret upphettas tämligen starkt och fylles med NO_2 genom att man omväxlande evakuerar (med vattensug) och sätter det i förbindelse med ett kärl, innehållande litet flytande NO_2. Upphettningen fortsättes med stängd kran, tills temperaturen kan anses någotsånär konstant. Härunder försvagas färgen, beroende på jämviktsförskjutningen vid stigande temperatur. Vid uppnådd högsta temperatur inställes på yttre lufttryck. Reducerventilen till en syrgasbomb inställes på lämpligt övertryck, t. ex. 0.5 atm., och hopkopplas med 3-vägskranen. Man iakttager ljusfläcken och öppnar därpå förbindelsen med syrgasbomben, varvid ljusfläckens bruna färg blir betydligt starkare. Inställes 3-vägskranen för kommunikation med luften, blåser gasen delvis ut, och färgen försvagas. Vid förnyad inblåsning av syre blir den återigen förstärkt. Detta kan upprepas flera gånger med samma ursprungliga NO_2-beskickning, tills färgen blir för svag att tydligt skönjas. Vid avsvalning med stängd kran ökas färgstyrkan, men får då ej vara alltför svag, då lågorna släckas.

De kemiska grundämnena och de naturliga atomslagen enligt isotopforskningens nuvarande ståndpunkt.

I följande tabell sammanfattar O. Hahn den berättelse över isotopforskningens framsteg under 1934, som han på uppdrag av Deutsche Chemische Gesellschaft publicerat i 1935 års första häfte av Sällskapets Berichte. Förf. utelämnar avsiktligt de radioaktiva isotoperna, likaså de på senare tid med konst framställda radioaktiva isotoperna. Denna senare inskränkning är det, som avses med uttrycket »naturliga», d. v. s. i naturen förekommande atomslag. Härifrån göres ett enda undantag, nämligen den genom beskjutning av deutoner med deutoner erhållna heliumisotopen ^3He, som visserligen är en konstprodukt, men på grund av sin beständighet sannolikt kommer att anträffas även i naturen.

Tabellens kolumner upptaga:

1. Atomnummer.
2. Elementets namn.
3. Elementets symbol.
4. Isotopernas massnummer.
5. Isotopernas procentiska andelar i elementet.
6. Packningsbråk.
7. Isotopernas atomvikter.
8. Elementets kemiska atomvikt.
   a. enligt isotopforskningen.
   b. den internationella tabellens värde.

Parenteser angiva osäkra resultat eller uppskattade värden.

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
1	Väte.....	H	1	99,98	+77,75 ± 0,35	1,007775	} 1,00776	1,0078
	»	H	2	0,02	+68,2 ± 0,2	2,01363		
	»	H	3	10^{-7}	—	—	—	—
2	Helium	(He)	(3)	?	—	—	—	—
	»	He	4	100	+ 5,4 ± 1	4,00216	4,00128	4,002
3	Litium	Li	6	8,3	+24,0 ± 0,5	6,0145	} 6,930	6,940
	»	Li	7	91,7	+21,0 ± 0,9	7,0146		
4	Beryllium ..	(Be)	(8)	(ca 0,05)	—	—	—	} 9,02
	» ..	Be	9	99,95	+17,2 ± 0,7	9,0155	9,0135	
5	Bor	B	10	20,6	+13,5 ± 1,5	10,0135	} 10,803	10,82
	»	B	11	79,4	+10,0 ± 1,5	11,0110		
6	Kol	C	12	99,0	+ 3,0 ± 1	12,0036	} 12,011	12,00
	»	C	13	1	—	—		
7	Kväve	N	14	99,7	+ 5,7 ± 2	14,008	} 14,008	14,008
	»	N	15	0,3	—	—		

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
8	Syre	O	16	99,8	0,00	16,000		
	»	O	17	0,03	—	—	16,000	16,000
	»	O	18	0,16	+ 3,6 ± 0,1	18,0065		
9	Fluor	F	19	100	0,0 ± 1	19,0000	18,996	19,000
10	Neon	Ne	20	90,0	— 1,6 ± 0,5	19,9967		
	»	Ne	21	0,27	—	—	20,189	20,183
	»	Ne	22	9,73	— 2,4 ± 0,5	21,9947		
11	Natrium	Na	23	—	—	—	—	22,997
12	Magnesium	Mg	24	[ca 78	—	—	—	
	»	Mg	25	ca 11	—	—	—	24,32
	»	Mg	26	ca 11]	—	—	—	
13	Aluminium	Al	27	—	—	—	—	26,97
14	Kisel	Si	28	89,6		—		
	»	Si	29	6,2	— 6,5 ± 1,0	—	28,122	28,06
	»	Si	30	4,2	(skattat värde)	—		
15	Fosfor	P	31	100	— 5,6 ± 1,5	30,9825	30,976	31,02
16	Svavel	S	32	[ca 97	—	—	—	
	»	S	33	ca 0,8	—	—	—	32,06
	»	S	34	ca 2,2]	—	—	—	
17	Klor	Cl	35	ca 75	— 4,8 ± 1,5	34,983	—	
	»	Cl	37	ca 25	— 5,7 ± 1,5	36,980	—	35,457
	»	(Cl)	(39)	?	—	—	—	
18	Argon	Ar	36	0,330	(— 6,6 ± 0,5)	(35,976)		
	»	Ar	38	0,05	—	—	39,948	39,944
	»	Ar	40	99,62	— 7,2 ± 0,3	39,971		
19	Kalium	K	39	ca 95	—	—	—	39,096
	»	K	41	ca 5	—	—	—	
20	Kalcium	Ca	40	97				
	»	Ca	42	0,8	— 7 (skattat värde)		40,077	40,08
	»	Ca	43	0,2				
	»	Ca	44	2,3				
21	Skandium	Sc	45	100	— 7 (skattat värde)	(44,968)	44,96	45,10
22	Titan	Ti	46	b	—	—	—	
	»	Ti	47	b	—	—	—	
	»	Ti	48	a	—	—	—	47,90
	»	Ti	49	b	—	—	—	
	»	Ti	50	b	—	—	—	
23	Vanadin	V	51	—	—	—	—	50,95
24	Krom	Cr	50	4,9	—	—		
	»	Cr	52	81,6	— 10 ± 3	51,948	52,005	52,01
	»	Cr	53	10,4	—	—		
	»	Cr	54	3,1	—	—		
25	Mangan	Mn	55	—	—	—	—	54,93
26	Järn	Fe	54	ca 5	—	—	—	55,84
	»	Fe	56	ca 95	—	—	—	
27	Kobolt	Co	59	—	—	—	—	58,94

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
28	Nickel	(Ni)	56	[< 1	—	—	—	
	»	Ni	58	ca 65	—	—	—	
	»	Ni	60	ca 35	—	—	—	
	»	Ni	61	> 1	—	—	—	58,69
	»	Ni	62	> 1	—	—	—	
	»	(Ni)	(64)	< 1]	—	—	—	
29	Koppar	Cu	63	ca 70	—	—	—	63,57
	»	Cu	64	ca 30	—	—	—	
30	Zink	Zn	64	50,4	— 9,9	63,937		
	»	Zn	66	27,2	—	—		
	»	Zn	67	4,0	—	—	65,327	65,38
	»	Zn	68	17,8	—	—		
	»	Zn	70	0,4	—	—		
31	Gallium	Ga	69	ca 67	—	—	—	69,72
	»	Ga	71	ca 33	—	—	—	
32	Germanium .	Ge	70	21,2				
	» ..	Ge	72	27,3				
	» ..	Ge	73	7,9	— 9,7		72,57	72,60
	» ..	Ge	74	37,1	(skattat			
	» ..	Ge	76	6,5	värde)			
33	Arsenik	As	75	100	— 8,8 ± 1,5	74,934	74,918	74,91
34	Selen	Se	74	0,9	—			
	»	Se	76	9,5	—			
	»	Se	77	8,3	—			
	»	Se	78	24,0	(— 8,0)	(77,938)	78,95	78,96
	»	Se	80	48,0	— 7,3 ± 2	79,941		
	»	Se	82	9,3	—			
35	Brom	Br	79	50,0	— 9,0 ± 1,5	78,929	79,910	79,916
	»	Br	81	50,0	— 8,6 ± 1,5	80,926		
36	Krypton	Kr	78	0,42	— 9,4 ± 2	77,926		
	»	Kr	80	2,42	— 9,1 ± 2	79,926		
	»	Kr	82	11,79	— 8,8 ± 1,5	81,927	83,76	83,7
	»	Kr	83	11,79	— 8,7 ± 1,5	82,927		
	»	Kr	84	56,85	— 8,6 ± 1,5	83,928		
	»	Kr	86	16,70	— 8,2 ± 1,5	85,929		
37	Rubidium ..	Rb	85	75,0	— 8,2 skattat värde		85,41	85,44
	» ..	Rb	87	25,0				
38	Strontium ..	Sr	86	10	— 8,2 skattat värde		87,64	87,63
	» ..	Sr	87	6,6				
	» ..	Sr	88	83,3				
39	Yttrium	Y	89	—	—	—	—	88,92
40	Zirkon.....	Zr	90	a				
	»	Zr	91	d				
	»	Zr	92	c				91,22
	»	Zr	94	b				
	»	Zr	96	e				

Isotopernas massnr. (4); procent i elementet (5); packningsbråk (6) isotopernas atomvikt (7); elementens kemiska atomvikt: enl. isotopforskningen (8 a), den intern. tab. värde (8 b).

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
41	Niob	Nb	93	100	— 8	92,926	92,90	92,91
42	Molybden ..	Mo	92	14,2	—	—		
	»	Mo	94	10,0	—	—		
	»	Mo	95	15,5	—	—		
	»	Mo	96	17,8	—	—	95,96	96,0
	»	Mo	97	9,6	—	—		
	»	Mo	98	23,0	ca — 5,5	97,946		
	»	Mo	100	9,8	— 5,5	99,945		
44	Rutenium ..	Ru	96	5				
	»	(Ru)	(98)	—				
	»	Ru	99	12				
	»	Ru	100	14	— 6 (skattat		101,1	101,7
	»	Ru	101	22	värde)			
	»	Ru	102	30				
	»	Ru	104	17				
45	Rodium	Rh	103	—	—	—	—	102,91
47	Silver	Ag	107	[ca 55	—	—	—	107,880
	»	Ag	109	ca 45]	—	—	—	
48	Kadmium ..	Cd	106	g	—	—	—	
	»	Cd	108	h	—	—	—	
	»	Cd	110	c	—	—	—	
	»	Cd	111	d	—	—	—	
	»	Cd	112	b	—	—	—	112,41
	»	Cd	113	e	—	—	—	
	»	Cd	114	a	—	—	—	
	»	Cd	115	i	—	—	—	
	»	Cd	116	f	—	—	—	
49	Indium	In	113	[ca 7				114,76
	»	In	115	ca 93]				
50	Tenn	Sn	112	1,07	—	—		
	»	Sn	114	0,74	—	—		
	»	Sn	115	0,44	—	—		
	»	Sn	116	14,19	—	—		
	»	Sn	117	9,81	—	—		
	»	Sn	118	21,48	—	—	118,70	118,70
	»	Sn	119	11,02	—	—		
	»	Sn	120	27,04	— 7,3 ± 2	119,912		
	»	Sn	121	2,96	—	—		
	»	Sn	122	5,03	—	—		
	»	Sn	124	6,19	—	—		
51	Antimon....	Sb	121	56	Mellan — 7,3		121,78	121,76
	»	Sb	123	44	och — 5,3			
52	Tellur	Te	122	2,9				
	»	Te	123	1,6				
	»	Te	124	4,5				
	»	Te	125	6,0	— 5 (skattat		127,58	127,61
	»	Te	126	19,0	värde)			
	»	(Te)	(127)	—				
	»	Te	128	32,8				
	»	Te	130	31,1				

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
53	Jod	J	127	100	— 5,3	126,932	126,904	126,92
54	Xenon	X	124	0,08	—	—		
	»	X	126	0,08	—	—		
	»	X	128	2,30	—	—		
	»	X	129	27,13	—	—		
	»	X	130	4,18	—	—	131,125	131,3
	»	X	131	20,67	—	—		
	»	X	132	26,45	—	—		
	»	X	134	10,31	— 5,3 ± 2	133,929		
	»	X	136	8,79	—	—		
55	Cäsium	Cs	133	100	— 5 ± 2	132,933	132,90	132,91
56	Barium	Ba	135	5,9	—	—		
	»	Ba	136	8,9	—	—	137,43	137,36
	»	Ba	137	11,1	—	—		
	»	Ba	138	74,2	— 6,1 ± 2	137,916		
57	Lantan	La	139	100	*)	—	138,91	138,92
58	Cer	Ce	140	89		—	140,13	140,13
	»	Ce	142	11		—		
59	Praseodym ..	Pr	141	100		—	140,91	140,92
60	Neodym	Nd	142	36		—		
	»	Nd	143	11		—		
	»	Nd	144	30		—	143,5	144,27
	»	Nd	145	5		—		
	»	Nd	146	18		—		
62	Samarium ..	Sm	144	3		—		
	»	Sm	147	17		—		
	»	Sm	148	14		—		
	»	Sm	149	15		—	150,1	152,0
	»	Sm	150	5		—		
	»	Sm	152	26		—		
	»	Sm	154	20		—		
63	Europium ..	Eu	151	50,6		—	151,90	153,0
	»	Eu	153	49,4		—		
64	Gadolinium .	Gd	155	21		—		
	»	Gd	156	23		—		
	»	Gd	157	17		—	156,9	157,3
	»	Gd	158	23		—		
	»	Gd	160	16		—		
65	Terbium	Tb	159	100		—	158,91	159,2
66	Dysprosium .	Dy	161	22		—		
	»	Dy	162	25		—	162,5	162,46
	»	Dy	163	25		—		
	»	Dy	164	28		—		
67	Holmium ..	Ho	165	100		—	164,91	163,5

*) Packningsbråket anses uppskattningsvis ökas från — 5 för de tyngre till — 3 för de lättare jordartsmetallerna.

Isotopernas massnr. (4); procent i elementet (5); packningsbråk (6); isotopernas atomvikt (7); elementens kemiska atomvikt: enl. isotopforskningen (8 a), den intern. tab. värde (8 b).

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
68	Erbium	Er	166	36		—		
	»	Er	167	24		—	167,15	167,64
	»	Er	168	30		—		
	»	Er	170	10		—		
69	Tulium	Tm	169	100		—	168,91	169,4
70	Ytterbium ..	Yb	171	9		—		
	»	Yb	172	21		—		
	»	Yb	173	17		—	173,2	173,04
	»	Yb	174	38		—		
	»	Yb	176	12		—		
71	Kassiopejum	Cp	175	100		—	174,91	175,0
72	Hafnium	Hf	176	c	—	—	—	
	»	Hf	177	b	—	—	—	
	»	Hf	178	a	—	—	—	178,6
	»	Hf	179	b	—	—	—	
	»	Hf	180	a	—	—	—	
73	Tantal	Ta	181	100	— 4	180,928	180,89	181,84 *)
74	Volfram	W	182	22,6		—		
	»	W	183	17,3		—		
	»	W	184	30,2	0 (skattat värde)	—	183,94	184,0
	»	W	186	29,9		—		
75	Renium	Re	185	38,2	—	—	186,2	186,31
	»	Re	187	61,8	— 1 ± 2	186,981		
76	Osmium	Os	186	1,0	—	—		
	»	Os	187	0,6	—	—		
	»	Os	188	13,6	—	—	190,29	191,5
	»	Os	189	17,3	—	—		
	»	Os	190	25,1	— 1 ± 2	189,98		
	»	Os	192	42,6	— 1 ± 2	191,98		
80	Kvicksilver..	Hg	196	0,10	—	—		
	»	Hg	197	ca 0,01	—	—		
	»	Hg	198	3,89	—	—		
	»	Hg	199	16,45	—	—		
	»	Hg	200	23,77	+ 0,8 ± 2	200,016	200,60	200,61
	»	Hg	201	13,67	—	—		
	»	Hg	202	29,27	—	—		
	»	Hg	203	ca 0,006	—	—		
	»	Hg	204	6,85	—	—		
81	Tallium	Tl	203	29,4	+ 1,8 ± 2	203,037	204,41	204,39
	»	Tl	205	70,6	+ 1,8 ± 2	205,037		
82	Bly	(Pb)	(203)	—		—		
	»	Pb	204	1,52		—		
	»	(Pb)	(205)	—		—		
	»	Pb	206	28,03	+ 1 (skattat värde)	—	207,15	207,22
	»	Pb	207	20,40		—		
	»	Pb	208	50,05		—		
	»	(Pb)	(209)	—		—		
	»	(Pb)	(210)	—		—		

*) Hönigschmids nya värde är 180,89.

1	2	3	4	5	6	7	8 a	8 b
83	Vismut	Bi	209	100	—	—	—	209,00
90	Torium	Th	232	—	—	—	—	232,12 *)
92	Uran	U	238	97	—	—	—	238,14

*) Enligt Aston för högt värde.

Isotopernas massnr. (4); procent i elementet (5); packningsbråk (6); isotopernas atomvikt (7); elementens kemiska atomvikt: enl. isotopforskningen (8 a), den intern. tab. värde (8 b).

Isländsk och medeltida skandinavisk tideräkning.

I band 21 av det stora samlingsverket »Nordisk kultur»[1] behandlas den nordiska tideräkningen. Bandet redigeras av Prof. Martin P:n Nilsson, som tidigare genom arbeten sådana som »Årets folkliga fester» och »Primitive Time Reckoning» visat sitt livliga intresse för detta gränsområde mellan humaniora och elementär matematik. I bandet ingår s. 5—76 en framställning av »Isländsk och medeltida skandinavisk tideräkning», författad av undertecknad, som tänkt sig, att en liten självanmälan kunde vara på sin plats.

Uppsatsens titel anger problemets stora svårighet. Huvudmassan av det vi känna genom exempelvis bondepraktikor och runstavar, utgöres av den kyrkliga kalendern med enstaka anpassningar till speciella nordiska förhållanden. Vill man söka ta reda på hur germanerna före kristendomen och före förbindelsen med romersk kultur indelade sitt år, så blir källmaterialet mycket torftigt. Man har en uppgift av Tacitus, att de utsatte sina sammankomster efter månen, efter ny- och fullmåne, och denna uppgift får en egendomlig bekräftelse genom den regel, efter vilken c. 1500 och ännu in på 1800-talet den stora uppsalamarknaden, »distingen» bestämdes. Det bestämmande var här fullmånen, den dag, då den närmaste nytändningen efter trettondag jul hade »gått i fylle». Att här måste föreligga en relikt av något gammalt, är uppenbart. Då man hade året i övrigt indelat dels efter det julianska, romerska året, dels efter *den beräknade* påskfullmånen, då hade det varit rätt hopplöst arbete att söka för vissa data införa en tredje räkning,

[1] Nordisk kultur, Red. Sigurd Erixon. 21 Tidräkningen. Stockholm, Bonnier 1934.

efter *den verkliga* fullmånen. När Snorre Sturlasson uppger, att distingen inträffade vid kyndelsmässan, så innebär detta rätt och slätt en generalisering av förhållandena år 1219, då Snorre var i Sverige.

Av övriga problem blir det lättaste problemet om dagens indelning. På Island, där vi känna förhållandena bäst, skedde denna indelning efter solens azimut, som man vid hemgården, tingsplatsen och andra för det dagliga livet viktiga platser bestämde efter föremål i terrängen, vilka sedan fingo namn, sådana som exempelvis Middagsberget rätt söder om Mora, Glasbacken (backen, där solen »gladas») rätt väster om tingsplatsen vid Götala (Skara), för att nu välja några svenska exempel ur ortsnamnsmaterialet. Att solens azimutförändring var oregelbunden, så att den kvadrant, som skulle representera 6 timmar, kunde representera exempelvis 5 eller 7, fick man finna sig i och kunde i allmänhet icke konstatera. Dock finnes en intressant uppgift om tidvattnet. Detta följer ju timvinkeln och kunde alltså komma högst obekvämt och livsfarligt, någon timme tidigare än man hade väntat. Själva faktum är observerat, men den förf. som så gjort, söker förklara det genom antagandet, att floden kommer så hastigt, att människan icke hann orientera sig. — Ett enstaka lagbud bestämmer söndagsvilans inträdande efter solens höjd.

För den, som är van att dagligen bestämma timmen efter solens azimut, ger sig en punkt av årsindelningen av sig själv. Han kan icke undgå att observera, att solen vid en tidpunkt på hösten och en tidpunkt på våren går ned rätt i väster och upp rätt i öster. Därmed voro dagjämningarna bestämda. På mycket nordliga breddgrader, t. ex. vid Islands nordkust, kunde man finna platser, där sommarsolståndet gav sig tillkänna genom en eller annan natt, då tack vare refraktionen solen lät en stråle slippa fram vid själva mitnattstimmen. Här fanns en fast punkt, och den är använd. Från skilda delar av norden har man uppgifter om ett sommarhalvår, som började d. 14 april och ett vinterhalvår, som började d. 14 oktober. Och på Island, där förhållandena voro en smula invecklade, har man en genomförd tideräkning, vars månader började omkring mitten av de julianska månaderna. De undrande frågor, som framställts rörande uppkomsten av denna månadsindelning, får sitt mycket enkla svar: Vid den tid då juliansk och nordisk tideräkning skulle sammanjämkas, lågo data för dagjämningar och solstånd, resp. solens ingång i olika signa, ungefär mitt i de julianska månaderna. Sommarhalvåret började ungefär precis en månad efter vårdagjämningen.

Islänningarna voro det lärdaste av de nordiska folken, och hos

dem fick saken en egenartad utveckling. Månadsindelningen spelade föga roll, men veckoindelningen var levande. Man räknade där halvåren icke från ovan angivna bestämda data utan från bestämda veckodagar i dessas närhet. Man hade gjort försök med ett rent veckoår på 52 veckor = 364 dagar. Men fort nog drog sig på detta sätt sommaren tillbaka mot våren, altinget kom att firas på en allt kallare tid av året. Man gjorde då försöket med inskott av en vecka vart sjunde år, detta blev ju icke heller korrekt, året blev i medeltal c. 6 timmar för kort. Men man övergav icke veckoräkningen, man införde en ordning med en veckointerkalation, som infördes 5 gånger under en period av 28 år, varje gång söndagsbokstaven E inträdde. Att man valt just denna söndagsbokstav, berodde på att den gällde vid de år, då februari har 5 söndagar, och detta reducerade avsevärt det trassel, som inträdde, då den valda söndagsbokstaven gällde endast i januari och februari, sålunda icke vid midsommar, då veckointerkalationen gjordes. Redogörelsen för denna fråga visar ganska mycket skarpsinne hos de isländska kronologerna och ganska mycken okunnighet hos de moderna humanister, som sökt tolka dem. Se tab. s. 76.

Rent astronomiskt står Odde (Stjornu-Oddi, Stjärnodde) i förgrunden. Av honom meddelas tre observationer. En gällde dag och timme för solståndens inträdande. Så vitt man tänker på sommarsolståndet, som lätt kunde observeras på Oddes hemort, bli iakttagelserna för 1100-talet förvånande korrekta. En viss kompromiss mellan observationsresultat och teori föreligger nog. Det var icke den enkle inhysesmannen på Island givet att här visa den stringens, som några århundraden senare ledde till upptäckten av en ny planet. Men solståndets definition tänkes rent astronomiskt: solens longitud exakt 90°. En annan observation gäller solhöjdens förändring. Skillnaden mellan högsta och lägsta middagshöjd ges ganska korrekt. Att variationen är ringa vid solstånd och stor vid dagjämningar, har Odde också vetat. Men som andra medeltidsmatematiker har han sökt i en aritmetisk serie uttrycka vad som kräver en vida mer komplicerad funktion. Han antar, att solhöjden tillväxer under varje vecka från vintersolståndet med $^1/_2$, 1, $1\,^1/_2$ o. s. v. soldiametrar. Summan mellan solstånd och dagjämning kommer ganska nära värdet på ekliptikans oblikvitet. Slutligen har han en observation angående den första gryningens azimut under olika tider av året.

Nat. Beckman.

Bokanmälningar.

R. A. Millikan, *Electrons (+ and −), Protons, Photons, Neutrons, and Cosmic Rays.* The University Press, Cambridge, 1935. 492 sid., 98 bilder. Pris bunden 15 sh.

Detta arbete av en av samtidens mest framskjutna atomfysiker kan sägas vara en tredje upplaga av samme författares 1917 utgivna »The Electron», vars huvudsakliga intresse låg i den utförliga redogörelsen för bestämningen av elektronens laddning. Denna redogörelse återfinnes i det nya arbetet i oförändrad form; ett par av de övriga i »The Electron» förekommande kapitlen (om atomernas byggnad och om strålningsenergiens natur) hava moderniserats och bringats i överensstämmelse med forskningens nuvarande ståndpunkt. Slutligen hava sex helt nya kapitel tillfogats, nämligen om »Waves and Particles, The Spinning Electron, The Discovery and Origin of the Cosmic Rays, The Positron, The Neutron and the Transumtation of the Elements, The Nature of the Cosmic Rays». Dessa kapitel hava ökat bokens omfång och illustrationsmaterialet till nära det dubbla. Som ofta i anglosaxisk litteratur hava strängare matematiska deduktioner skilts från texten i övrigt och samlats i ett antal Appendices.

Det är av ett visst intresse att konstatera, att redogörelsen för den kosmiska strålningen, i vars utforskande Millikan själv tagit så väsentlig del, bär samma personligt färgade prägel som den tidigare, nu omtryckta redogörelsen för bestämningen av e, medan övriga kapitel äro hållna i en mera konventionell stil. Oberoende härav utgör arbetet i sin helhet en välskriven och lättläst framställning av det i titeln angivna området, och kan på det livligaste anbefallas åt var och en, som behöver en sammanfattande översikt över upptäckten och naturen av åtminstone de flesta av de nya korpusklerna och av den kosmiska strålningen.

G. Starck.

Lennart Smith, *Handledning i organisk syntes och reaktionslära.* Gleerup, Lund 1935, 139 sid., pris inb. 4:25.

De studerande i kemi hava hittills vid laborationerna i organisk kemi uteslutande varit hänvisade till laborationshandledningar på

främmande språk. Denna brist i den svenska lärobokslitteraturen har nu avhjälpts, i det att professor Lennart Smith i Lund utgivit en handledning i organisk syntes och reaktionslära.

Boken, som i företalet säges vara »ett försök att åstadkomma en handledning i organisk syntes av lämplig omfattning för de studerande, som skola avlägga fil. kandidat- eller fil. ämbetsexamen», har kanske väl mycket tillrättalagts för kursen i organisk kemi sådan den utformats i Lund, vilket dock icke hindrar att den torde bliva till stor nytta även vid andra universitet och högskolor. Även för skolans del torde mycket av värde vara att hämta ur den. För förståelse av boken förutsättes kunskaper i organisk kemi »motsvarande ungefär de viktigaste delarna i Widmans lärobok».

Boken, som upptar fyra huvudavdelningar, inledes med en avdelning på fyra sidor med råd och anvisningar om hur man bör bedriva arbetet för att undvika olyckor eller åtminstone begränsa följderna av dem. En särskild uppmärksamhet förtjänar uppmaningen till försiktighet vid arbeten med eter, som fått stå under längre tid, vilken då som bekant kan innehålla peroxider, som kunna giva upphov till våldsamma explosioner.

Sedan följer en avdelning på 29 sidor över allmänna arbetsmetoder, där det först lämnas anvisningar för förberedning av försöken. Därefter redogöres för de vanligaste arbetsmetoderna, såsom destillation vid vanligt och reducerat tryck samt med vattenånga, extraktion med eter och liknande lösningsmedel, tvättning och torkning, omkristallisation och filtrering samt prövning av ämnens renhet genom bestämning av smältpunkt, kokpunkt och spec. vikt.

De råd och anvisningar, som här givas, äro mycket värdefulla för nybörjare, i det att de på ett klart och lättfattligt sätt sätta honom in i de vanligaste organisk-kemiska operationerna.

En del små anmärkningar kunna dock göras. Författaren anger, att en fraktionskolv endast får fyllas till ungefär hälften av kolvens volym. Vid destillation i vakuum är detta av synnerlig vikt, men vid destillation under vanligt tryck anser dock anmälaren det lämpligt att utfylla kolven åtminstone till två tredjedelar.

På sid. 30 säger författaren, att en skiljetratt bör ha kort pip, en dropptratt däremot lång. Det är nog sant, men av Fig. 1 får man lätt den uppfattningen, att det är deras form i övrigt som är avgörande. I en dropptratt vill man helst även ha en droppräknare i pipen.

Fig. 7, som skall visa ett vridförlag för vakuumdestillation, är missvisande och saknar dessutom förklarande text.

Vid beskrivning av filtrering på sug anbefalles som förlag endast sugkolv, ev. i denna nedsatt preparatrör, under det att sugklockan ej alls omtalas. Denna är dock, enligt anmälarens mening, överlägsen sugkolven i många fall och särskilt i sådana, där kristallisation sker i filtratet genast efter filtreringen. Det är nämligen betydligt lättare att få ut kristallerna ur en bägare än ur en smalhalsad sugkolv.

Nästa stora avdelning (36 sidor) har rubriken »Organisk reaktionslära». Den inledes med en avdelning kvalitativ elementaranalys, varefter följer en riklig mängd av för de viktigaste ämnesgrupperna typiska reaktioner, vilka till största delen kunna utföras med enkla medel, oftast i provrör. Många av dem lämpa sig synnerligen väl som undervisningsexperiment på skolstadiet.

Härefter följer en preparativ del, där synteserna äro ordnade på tre någorlunda likvärda serier med 16 stycken i varje. Synteserna synas vara väl valda och beskrivna samt belysas liksom den allmänna delen av ett stort antal elegant ritade och (med undantag av Fig. 7) instruktiva figurer.

Boken avslutas med, förutom register, förteckningar över de vanligaste reagensen samt över de kemikalier, som äro erforderliga dels för reaktionsläran dels för synteserna.

Rudolf Junell.

H. Åkerblom, *Elektricitetslärans och elektromaskinlärans grunder*, Wahlström och Widstrand, Stockholm 1934, 214 sid., häft. kr. 4:75, inb. kr. 6:—.

Arbetet utgör enligt förordet en sammanställning av anteckningar från undervisning i yrkeskurser för elektriska installatörer enligt den av Kungl. Skolöverstyrelsen fastställda undervisningsplanen. Författaren har emellertid begränsat sig till den mera teoretiska stommen för undervisningen, varför av de tekniska tillämpningarna endast medtagits grundtyperna av de elektriska maskinerna.

Bokens första hälft behandlar elektricitetsläran i ungefär samma omfattning som de gängse skolböckerna i fysik. Efter ett mera ingående studium av likströmsmaskinen ägnas ett kapitel åt växelströmsteori, varvid vektordiagram komma till användning. De tre sista kapitlen anslås åt växelströmsmaskinerna: synkronmaskinen, transformatorn och asynkronmaskinen. Avsnitten, som behandla elektromaskinlära, äro utan tvivel det mest värdefulla av innehållet.

Tyvärr förefaller det, som om författaren ej genomarbetat sina anteckningar med största omsorg, varför framställningen flerstädes är oklar (begreppen fältstyrka och induktion s. 12 resp. 90,

stycket om vektorer s. 131, begreppet reaktiv effekt s. 148, tvåwattmetermetoden s. 158, asynkronmotorns moment s. 202, etc.). Vid behandling av växelströmmens medelvärden sätter författaren likhetstecken mellan galvanometriskt och elektrolytiskt medelvärde. Detta torde ej vara i överensstämmelse med vedertaget bruk, då man med elektrolytiskt medelvärde hos en allmän växelström avser aritmetiska medelvärdet över en hel period (likströmskomponenten), vilket hos en ren växelström är noll. En genomgående anmärkning mot formlerna i boken är, att enheter för de ingående storheterna ej angivas. Särskilt kännbar är denna brist vid Coulombs lag på s. 23, och formeln för en kondensators kapacitet på s. 24. Denna sistnämnda formel kan för övrigt knappast vara riktig. Som enhet för induktionsflöde användes weber, varför faktorn 10^{-8} i induktionslagen bortfaller. När författaren sedan (s. 133) skriver induktionslagen för en ledare under formen $E = Hlv$ volt, mäter han alltså H i weber/cm², under det att fältstyrkeenheten redan fastlagts medelst Coulombs lag (s. 12).

I ett arbete som detta hade Svenska Teknologföreningens anvisningar beträffande beteckningar etc. bort följas och följaktligen effekt betecknas med P i stället för W, etc.

Boken illustreras av ett antal enkla, men i stort sett tydliga och instruktiva figurer.

G. Ödberg.

C. G. A. Arvidson och C. O. Hiljding, *Logaritmiska navigeringstabeller*, Del. I, Nautiska förlaget, Stockholm 1935, VIII + 189 sid., kbd., 14 kr.

År 1932 utkommo på Nautiska förlaget C. G. A. Arvidsons Praktiska navigeringstabeller, anmälda i denna tidskrifts juninummer 1933. Det nu föreliggande arbetet presenteras av förlaget såsom del I av ett fullständigt nautiskt tabellverk, vars del II utgöres av den förut utgivna volymen. Ordningsföljden motiveras därav att den först publicerade delen är avsedd för den dagliga praktiska navigeringstjänsten ombord, medan den nu utkomna är avpassad för den teoretiska navigationsskoleundervisningen.

I stort sett ansluter sig del I till den vanliga typen av nautisk-logaritmiska tabeller. Uppställningen är klar och redig, och utgivarna ha gjort sig all möda att genom synnerligen omfattande kontrollering och noggrann korrekturgranskning eftersträva den felfrihet, som för arbeten av detta slag är lika betydelsefull som svåruppnådd. En kort formelsamling inleder volymen.

Sven Grenander.

Gradualavhandlingar.[1]

MARTIN SÖDERMAN, *Beitrag zur Festlegung der Skala der Röntgenwellenlängen in absolutem Mass* (Nov. Act. Reg. Soc. Scient. Ups. ser. IV vol. 9 nr. 8) Upsala 1935, 42 sid. Disp. i Upsala den 2 febr. 1935. Opponenter: docent BENGT EDLÉN och assistent TORSTEN MAGNUSSON.

Redan några få år efter upptäckten av röntgenstrålningen stod det klart, att den var av elektromagnetisk natur och att man alltså borde kunna bestämma dess våglängd enligt metoder, analoga med dem, som användas inom det vanliga synliga området och det ultravioletta. Försök med brytning i prisma gåvo emellertid negativt resultat, då brytningsindex för dessa korta våglängder är mycket nära 1. Den andra inom det vanliga spektralområdet använda metoden, gittermetoden, kunde man ej heller använda i dess ursprungliga form, men genom att ersätta de mekaniskt ritsade gittren med de naturliga i vissa kristaller fick man en möjlighet att bestämma röntgenstrålarnas våglängder i förhållande till kristallernas atomplanavstånd. Då dessa senare emellertid äro så små, att de undandraga sig direkt uppmätning, var man hänvisad till att på teoretisk väg fastlägga atomplanavståndet hos en kristall och sedan hänföra alla våglängdsbestämningar inom röntgenområdet till detta normalavstånd. Man införde härigenom en ny längdenhet och valde denna, den s. k. X-enheten så, att den skulle bli 1/1000 Å.

Nu ha de senaste årens forskningar, framför allt de, som bedrivits av prof. Siegbahn och hans lärjungar, utvidgat röntgenområdet i riktning mot längre våglängder och området för ultraviolett strålning mot kortare, och i stället för det gap, som förut fanns mellan dessa båda strålningstyper, har man nu ett område, inom vilket man kan uppmäta både röntgenstrålning och ultraviolett, och det med samma spektroskopiska utrustning. Man har härigenom fått en möjlighet att direkt jämföra dem och sålunda bestämma förhållandet mellan X-enheten och Å-enheten. För en dylik jämförelsemätning borde såväl plangitter- som konkavgittermetoden kunna användas. Båda erbjödo emellertid vissa tekniska svårigheter, men det visade sig, att dessa kunde reduceras genom att man kombinerade båda metoderna på så sätt, att man använde konkavgitter men ställde plåten vinkelrätt mot strålknippet på samma sätt som vid plangittermetoden. Genom lämpligt val av gitter-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

konstant, krökningsradie hos gittret samt avstånd mellan gitter och plåt kunde man bekvämt göra relativmätningar inom ett visst område. Röntgenstrålningen erhölls från ett vattenkylt röntgenrör, som arbetade med 15 kV och 10 MA. Vid gnistupptagning utbyttes elektroderna mot likaledes vattenkylda gnistelektroder, och spänningen erhölls från ett kondensatorbatteri, som kunde laddas upp till 80 kV och hade en kapacitet av 2 MF.

Den röntgenlinje, som uppmättes, var Al K_α, vars våglängd förut noggrant bestämts i kristallskalan. Den registrerades i IX:de, X:de och XI:te ordningen och mättes relativt aluminiums gnistspektrum. Som resultat erhölls Al $K_\alpha = 8{,}340$ Å, medan den tidigare av docent Larsson utförda kristallmätningen givit Al $K_\alpha =$ $= 8322{,}48$ X.E.

Man erhåller härur sambandet:

$$1000 \text{ X.E.} = 1{,}0021 \text{ Å.}$$

Vid den teoretiska beräkningen av X-enheten hade man använt ett flertal empiriskt bestämda konstanter, vilka samtliga med ett enda undantag voro kända med stor relativ noggrannhet. Undantaget utgjordes av elektronens laddning, för vilken man vid beräkningen använt Millikans värde $e_0 = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ e.s.e.

Ur det nu bestämda värdet på X-enheten erhåller man i stället $e = 4{,}806 \cdot 10^{-10}$ e.s.e.

En diskussion av de med olika metoder utförda e-bestämningarna ger vid handen, att det nu funna värdet väl överensstämmer med de av Bäcklin i Upsala och Bearden i Chikago enligt en annan spektroskopisk metod utförda bestämningarna, medan Millikans värde ligger långt utanför felgränsen. Då Millikans lärjungar vid en upprepning av hans försök erhållit exakt samma värde som förut och ange mycket snäva felgränser, förefaller det, som om de spektroskopiska metoderna skulle leda till ett annat värde på elektronladdningen än den av Millikan använda oljedroppsmetoden. Då emellertid feldispersionen i de Millikanska mätningarna är avsevärt större än i de spektroskopiska, torde avvikelsen helt enkelt kunna förklaras genom att Millikan och hans lärjungar överskattat noggrannheten i sin metod.

Ragnar Rydberg, *Über Neubildung und Zerfall zweiatomiger Moleküle, von spektroskopischem Standpunkte aus.* Stockholm 1934, 75 sid. Disp. i Stockholm den 8 dec. 1934. Opponenter: prof. E. Hulthén, fil. lic. B. Grundström.

Som framgår av titeln behandlar denna avhandling frågan om molekylers nybildning och dissociation, varvid främst tagits sikte

på den fysikaliska sidan av saken, alltså hur dessa fenomen betingas av den mekaniska sammanhållningen mellan atomerna.

Om energi tillföres till en molekyl t. ex. genom strålning eller genom stöt med annan molekyl, så upplagras denna energi i form av svängnings- och rotationsrörlser inom molekylen. Men när energitillskottet nått ett visst värde, bli amplituderna så stora, att atomerna glida från varandra till så stora avstånd att attraktionen mellan dem upphör — molekylen dissocieras. För ännu större energitillskott kastas atomerna från varandra, så att hastigheten består även för stora avstånd — molekylen dissocieras under avgivande av rörelseenergi. Men även i det sistnämnda fallet kan molekylen, trots det stora energiöverskottet, bestå under en kort tidrymd, från en omätbar på c:a 10^{-13} sek. upp till 10^{-8} sek., innan den sönderfaller. För mänsklig uppfattning förefaller dylika tidsrymder svårbestämbara, men de äro i detta fall av synnerligen stor teoretisk betydelse. Att sönderfallet fördröjes beror därpå att ifrågavarande energitillstånd äro på visst sätt labila. Samma slag av labilitet förefinnes hos de radioaktiva substanserna, men sönderfallstiderna kunna där variera inom vidare gränser, från 10^{-6} sek. upp till årtusenden.

För det radioaktiva sönderfallet har en teori utbildats vars riktighet dock ej kunnat prövas på grund av att atomkärnans konstitution är alltför litet känd. Då nu samma teori kommer till användning för molekylens sönderfall bli möjligheterna till en ingående prövning större, ty molekylens byggnad är bättre känd tack vare alla de bandspektroskopiska undersökningar och analyser, som utförts sedan banbrytaren Heurlingers tid. Genom en tämligen besvärlig grafisk metod som beskrives i föreliggande avhandling, har nu sönderfallssannolikheten för några energitillstånd hos kvicksilverhydriden (HgH) beräknats i enlighet med ovannämnda teori. Denna sönderfallssannolikhet kan även bestämmas på direkt experimentell väg, ty spektrallinjer från dylika labila, kortlivade energitillstånd måste enligt Heisenbergs osäkerhetsrelation bli breda och diffusa. En uppmätning av linjebredden möjliggör därför en prövning av sönderfallsteorien. Överensstämmelsen var i föreliggande fall ej fullständig, men dock tillfredsställande i betraktande av det komplicerade förfaringssättet.

Denna teori för sönderfallsmekanismen kan alltså betraktas som godtagbar, och det var därför av intresse att undersöka, huruvida den ej skulle kunna utsträckas att omfatta även den omvända processen, alltså nybildning av molekyler. Denna måste då ske så, att två atomer kollidera med varandra med en viss hastighet relativt varandra. Hastigheten måste ha ett bestämt belopp, så att ato-

merna i kollisionsögonblicket kunna sammankopplas till en labil molekyl av nyss omnämnt slag. Från detta labila energitillstånd kan molekylen sedan, inom en viss kort tidsrymd, antingen sönderfalla, eller också genom avgivande av strålningsenergi övergå att bli en stabil molekyl. Om man lägger den här skisserade sammanbindnings- och dissociationsmekanismen till grund för en beräkning av jämvikten i en kemisk reaktion, så kommer man verkligen fram till massverkans lag, vilket måste tagas som en verifikation på den vågmekaniska teoriens riktighet.

I föreliggande avhandling visas även, huru denna teoretiska syn på molekylers sönderfall och nybildning ger en godtagbar förklaring på vissa egendomligheter vid ljusbågsspektra, tidigare iakttagna av skilda forskare.

Föredrag under våren 1935 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. H. Björk; förman i arbetsutskottet fil. kand. N. E. Fremberg.

Föredrag: fil. lic. J. Tandberg, Vinkelns tredelning ($^{29}/_{3}$).

Fysiska Föreningen, ordf. docent O. Lundquist, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: lektor Gustaf Arvidsson, Samband mellan atomens magnetiska moment och impulsmoment ($^{15}/_{2}$); prof. Knut Lundmark, Nyare undersökningar angående explosionsstjärnor ($^{16}/_{4}$); fil. lic. John Tandberg, Några äldre historiska instrument på Fysiska institutionen i Lund ($^{24}/_{5}$).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens K. E. Thomé.

Föredrag: prof. E. Biilmann, Racemisering av betainestrar ($^{14}/_{2}$); prof. S. Bodforss, Om bestämning av reaktionshastighet genom ljusextinktionsmätning ($^{14}/_{2}$); docent E. Schjånberg, Några atropisomera föreningars konstitution ($^{22}/_{3}$); amanuens K. E. Thomé, Några teorier för katjonkatalys ($^{22}/_{3}$); prof. V. M. Goldschmidt, (Göttingen), Kristalstruktur og kemisk sammensætning ($^{24}/_{4}$), Geokemiske undersökelser over jerngruppens metaller ($^{25}/_{4}$), Geokemiske undersökelser over nogen matalloider ($^{25}/_{4}$).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. W. Odhnoff.

Föredrag: fil. mag. Fr. Ehrnst, Om applikationsteoremet inom differentialgeometrien ($^{27}/_{2}$); doktor W. Feller, Om differential-

geometrien på konvexa ytor ($^{27}/_{3}$); lektor H. Petrini, Den Bertrandska paradoxen ($^{26}/_{4}$); prof. B. Lindblad, Stjärnsystemets rörelseförhållanden ($^{24}/_{5}$).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. ingenjör C. H. Johansson.

Föredrag: fil. lic. E. Ingelstam, Temperaturområdets senaste utvidgning mot absoluta nollpunkten ($^{1}/_{6}$); fil. kand. T. Johansson, Nyare experimentella bidrag till tidsenhetens definition ($^{1}/_{6}$).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föredrag: fil. dr. N. V. E. Nordenmark, Demonstration av Zeiss' planetarium ($^{7}/_{5}$). Om föreningens årsmöte se marsh. 1935 sid. 42.

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. G. Ising, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: prof. E. Hulthén, Nyare undersökningar över deuteridernas spektra ($^{11}/_{2}$); docent R. Rydberg, Om den elektriska ljusbågen ($^{25}/_{2}$); prof G. Borelius, Magnetiska atommoment hos metaller och legeringar ($^{26}/_{3}$); fil. mag. G. Gustafsson, Experimentella anordningar för undersökning av para- och diamagnetiska metaller ($^{26}/_{3}$); fil. kand. Hilding Olsson, Strålning och ljus å Nordenskjöldsfjället och på Isakssons platå å Spetsbergen ($^{5}/_{4}$); prof. C. Benedicks, Bestämning av den elektrotermiska homogeneffekten medelst Wheatstones brygga ($^{29}/_{4}$); fil. kand M. Helde, Nyare metoder för räkning av joniserade strålar ($^{29}/_{5}$); ingenjör K. Stenberg, Demonstration av Wynn-Williams strålräknare ($^{29}/_{5}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: prof. H. v. Euler, Till hundraårsminnet av katalysbegreppets införande genom Berzelius ($^{28}/_{3}$); prof. Arvid Hedvall, Reaktivitet och aktivitet hos materien i övergångstillstånd ($^{28}/_{3}$); lektor G. Starck, Skolans önskemål på lärareutbildning vid universiteten (med diskussion, $^{11}/_{4}$); prof. W. H. Zachariasen (Chicago), Resultater av undersökelser over surstoffradikalers oppbygning i krystaller ($^{3}/_{5}$).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. A. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Föredrag: fil. lic. E. Lunell, Elementära geometriska konstruktioner ($^{5}/_{3}$); fil. lic. S. Täcklind, En härledning av Denjoy's teorem ur värmeledningsekvationen ($^{2}/_{4}$); prof. Trygve Nagell, Lösning av ett problem ur den aritmetiska teorien för kubiska kurvor ($^{2}/_{5}$).

(Forts. å sid. 152.)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

748) *På höjden mot sidan BC i den liksidiga triangeln ABC väljes punkten P inom triangeln så, att* $\angle BPC = 80°$. *Sök exakta värdet på det förhållande, i vilket mittpunktsnormalen till AP delar omkretsen av den kring ABC omskrivna cirkeln.* X.

749) *Vilken blir koefficienten för den term som innehåller* x^n, *när divisionen* $(1+x)^{2n+1} : (1-x)$ *utföres efter stigande dignitet?* (*n ett positivt helt tal*) X.

750) *En rot till ekvationen* $x^4 - 22x^2 - 48x = 23$ *är r. Vilka värden har* $r^3 - 3r^2 - 15r - 3$? X.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

751) Om x_1 är en rot till ekvationen $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} = 3$, beräkna värdet av $(x_1 - 2)(x_1 - 3)$.

Svar: 1 eller $-\frac{1}{8}$.

752) För vilka värden på a är produkten av två rötter till ekvationen $x^4 + (a-2)x^3 + (a-1)x + a + 1 = 0$ lika med produkten av de båda andra rötterna?

Svar: 3 och $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

753) Visa, att i varje triangel ABC förhållandet $(r_b + r_c) : a$ är en trigonometrisk funktion av en av triangelns vinklar.

Svar: $\cot\frac{A}{2}$.

754) Lös ekvationen $\frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 2x} = tg\,4x - tg\,x$.

Svar: $\pm 18° + n \cdot 180°$; $\pm 54° + n \cdot 180°$; $\pm 60° + n \cdot 180°$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 751—760, 764 äro insända av *X*, 761 av *C. H.*, 763, 765 av *S. B.*

755) Om sidorna i en triangel uppfylla villkoret $(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2)$, så är skillnaden mellan två vinklar 90°.

756) Kring en cirkel med diametern d är omskrivet ett likbent parallelltrapets. Avståndet mellan cirkelns kontaktpunkter med de icke parallella sidorna är a. Visa, att trapetsets yta är $= \frac{d^3}{a}$.

757) I en cirkel med ytan A är en regelbunden $2n$-hörning med ytan B inskriven. Man sätter märke på ett hörn P och rullar sedan $2n$-hörningen längs en rät linje l så, att hörn efter hörn tjänstgör som vridningscentrum. P börjar på l och rullningen fortsättes, tills P återkommit till l. Visa, att den yta, som inneslutes mellan P:s bana från begynnelse- till slutläget och linjen l är $2A + B$. Vad erhålles, om man låter n växa obegränsat?

Svar: $3A$ (cykloid).

758) Omkretsen av en regelbunden niohörning är O. Omkretsarna av de 9-hörningar, som de längsta, resp. kortaste diagonalerna i den ursprungliga 9-hörningen avgränsa äro O_1 och O_2. Visa, att $O = O_1 + O_2$.

759) Två cirklar tangera varandra utantill i A. En gemensam yttre tangent har kontaktpunkterna B och C. Figuren roterar kring centrallinjen, varvid bågarna AB och AC alstra var sin kalott och BC manteln av en stympad kon. Visa, att denna mantelyta är = summan av kalottytorna.

760) I en romb $ABCD$ med ledgångar i hörnen är sidan 8 längdenheter. Diagonalen AC ligger på y-axeln. Sidorna BC och DC gå genom punkterna (2; 0) och (— 2; 0) resp. Hur långt från origo kan hörnet A avlägsna sig?

Svar: $8\sqrt{3}$.

761) Till kurvan $y = (x^2 - 1)(x - a)$ drages tangenten i punkten $(a; 0)$. Denna tangent skär y-axeln i P. Bestäm a så, att P:s avstånd till origo blir så stort som möjligt.

Svar: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

762) I rektangeln $ABCD$ är $AB = 8$ cm och $BC = 3$ cm. Bestäm en punkt E på CD, så att kvoten $AE : BE$ blir så stor som möjligt.

Svar: E ligger på förlängningen av CD; $CE = 1$ cm.
Maximiförhållandet är 3.

763) Parabeln $4y = 9 - 4x^2$ skär positiva x-axeln i P. Bestäm maximilängden av en korda genom P.

Svar: $2\sqrt{2}$.

764) Hur långt avlägsnar sig kurvan $y(x^2+1)=x^3$ från sin asymptot?

Svar: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

765) I triangeln ABC, där AB är av konstant längd, är $AC = n \cdot BC$. Bestäm maximivärdet av sinus för vinkeln A; n är ett positivt tal >1.

Svar: $\frac{1}{n}$.

Lösningar till uppg. 707—709.

707) *Om koefficienterna äro rationella och bråket*

$$\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$$

kan förkortas med en lineär faktor, så är $(Bc-Cb):(Ab-Ba)$ *en jämn kvadrat.* *X.*

Enär bråket kan förkortas, bli både täljare och nämnare $=0$ för ett rationellt värde $x=p$. Elimineras p-termen ur de två ekvationerna $ap^2+bp=-c$ och $Ap^2+Bp=-C$, så fås $p^2(Ab-Ba)=Bc-Cb$, varmed satsen är bevisad. *B-r.*

Även löst av *C. H.; Ed. Sn.* och *L.*

708) *I triangeln* ABC *är* $\angle A=100°$, $\angle B=60°$. *Punkten* P *ligger inom triangeln och* $\angle PAC=30°$, $\angle PBC=20°$. *Beräkna* $\angle APC$ *exakt.* *X.*

Fäll normaler PM, PN och BR mot resp. AC, BC och PA, så blir om $PM=1$, $PA=2$, $PR=1$ och $\triangle PNR \cong PRB$, varav $PN=1$ och CP bissektris samt $\angle APC=140°$. *L.*

Även löst av *B-r, C. H.* och *Ed. Sn.*

709) *Två cirklar med centra på* x*-axeln tangera ellipsen* $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ *och råkas under räta vinklar. Sök orten för deras skärningspunkt.* *X.*

Problemet bör fattas så, att cirklarna ha *bikontakt* med ellipsen således ej ständigt tangera i topparna, då ellipsen blir överflödig.

Ekvationen $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2+c^2(x-p)^2=0$ betyder en cirkel, som tangerar ellipsen $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ i dess skärningspunkter med linjen $x=p$. Deriveras den förstnämnda ekvationen, så fås $b^2x+a^2yy'+c^2(x-p)=0$. Elimination av p ger $c^2(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(b^2x+a^2yy')^2=0$. Produkten av de båda värden på y', som denna ekvation ger, skall vara $=-1$. Härav fås $(b^2c^2+b^4)x^2+(a^2c^2+a^4)y^2-a^2b^2c^2=0$ eller $b^2x^2+(a^2+c^2)y^2=b^2c^2$, d. v. s. en ellips. *X.*

Även löst av *C. H., S. W.* och *L.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1935.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Diagonalerna i en rektangel $ABCD$ skära varandra under en vinkel av 60°. Till vinkeln BAD drages bissektrisen AE (punkten E ligger på BC mellan B och C). Beräkna förhållandet mellan ytorna av triangeln ABE och paralleltrapetset $AECD$.
2. Framställ grafiskt funktionerna $y = x^2 - 3x + 1$ och $y = x$ samt angiv med ledning härav de ungefärliga värdena på x och y i de punkter, där kurvorna skära varandra. Beräkna därefter och angiv dessa värden exakt.
3. I triangeln ABC är AC 100 m, vinkeln A 25° och vinkeln B 110°. En punkt D ligger på AC mellan A och C så, att BD är lika lång som BC. Beräkna ytan av triangeln BDC.
4. Av en given triangel ABC avskär den med BC parallella linjen DE en triangel DAE, vars yta är en tredjedel av triangeln ABC:s yta. Genom punkten D, som ligger på sidan AB, drages linjen DF parallell med AC; den råkar BC i F. Beräkna förhållandet mellan ytan av parallellogrammen $DECF$ och ytan av triangeln ABC.
5. En person stiftade vid ett års början en stipendiefond å 6 500 kr. med föreskrift, att vid årets slut och därefter likaledes vid varje följande års slut ett stipendium på 100 kr. skulle utdelas, så länge den årliga räntan understege 400 kr. Hur många gånger utdelades ett sådant stipendium, då räntefoten var 4 %?
6. I triangeln ABC är AB 11 cm, BC 20 cm och CA 13 cm. Med A som medelpunkt ritas en cirkel, vilken tangerar sidan BC. Beräkna längden av den cirkelbåge, som ligger inom triangeln.
7. En lodrät mur, som är 4 m hög, går i riktning nordost till sydväst. En dag, då solen står rakt i söder, är dess höjd över horisonten 30°. Hur bred skugga (bredden mätt vinkelrätt mot muren) kastar vid det tillfället muren på den horisontella marken?

8. Angiv under så enkel form som möjligt lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - ay + a^2z - a^3 = 0, \\ x - by + b^2z - b^3 = 0, \\ x - cy + c^2z - c^3 = 0, \end{cases}$$

där a, b och c äro givna, konstanta tal, sinsemellan olika.

Resultat: 1. $\frac{\sqrt{12}+1}{11} = 0{,}4058$. 2. $2 \pm \sqrt{3}$. 3. 1011 m². 4. $\frac{\sqrt{12}-2}{3} = 0{,}4880$. 5. 17 gånger. 6. 12,97 cm. 7. $\sqrt{24} = 4{,}9$ m. 8. $x = abc$; $y = ab + bc + ac$; $z = a + b + c$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. I fyrhörningen $ABCD$ äro sidorna AB, BC och CD lika långa. Vinklarna B och C äro 100° och 110°. Beräkna vinklarna A och D.

2. Bestäm alla värdesystem x, y, som satisfiera ekvationssystemet

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1; \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}.$$

3. Ekvationerna för en fyrhörnings sidor äro i ordning $y + 3 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2y - 12 = 0$, $2x - y - 19 = 0$. Sök vinkelräta avstånden till den diagonal, som går genom skärningspunkten mellan de två sistnämnda sidorna från de båda hörn, som icke ligga på densamma.

4. På ett horisontellt bord ligga fyra klot, vartdera med radien 8 cm, ordnade så, att deras medelpunkter bilda en kvadrat med sidan 16 cm. Ovanpå dessa klot lägges ett femte, som tangerar de fyra och vars radie är 25 cm. Hur högt över bordet ligger dess medelpunkt?

5. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av femte och sjätte termerna lika med 4. Vilket är det minsta värde, som summan av en sådan oändlig serie kan antaga?

6 En rät cirkulär kon har sin topp på ytan av ett klot, och dess axel går genom klotets medelpunkt. Konens mantelyta (som tänkes obegränsat utdragen) delar klotets yta i två delar, så att den del, på vilken konens topp är belägen, är dubbelt så stor som konens innanför klotet belägna mantelyta. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka klotets volym delas genom konens mantelyta.

7. Lös ekvationen

$$\cot 3x + 3 \cot x + \operatorname{tg} x = 0.$$

8. På kurvan $y = x^3 - 3x$ har man tagit en punkt P, vars x-koordinat betecknas med a. Tangenten till kurvan i P skär denna dessutom i en punkt R. En triangel har två hörn i P och R och det tredje i origo. Beräkna dess yta uttryckt i a.
9. Sök maximivärdet för ytan av ett likbent paralleltrapets, där den mindre av de parallella sidorna är a cm och vardera av de icke parallella sidorna är medelproportional till de båda parallella sidorna.

Resultat: **1.** $A = 78°{,}30$; $B = 71°{,}70$. **2.** $x_1 = 1 + \sqrt{5}$, $y_1 = -3 - \sqrt{5}$; $x_2 = 1 - \sqrt{5}$, $y_2 = -3 + \sqrt{5}$. **3.** $3{,}2\sqrt{5}$ och $1{,}2\sqrt{5}$. **4.** 39 cm. **5.** 27. **6.** 9 : 7. **7.** $\pm 54°{,}73 + n \cdot 180°$. **8.** $3a^4$. **9.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{22 + 10\sqrt{5}}$ cm², då den längre av de parallella sidorna är $= a(2 + \sqrt{5})$.

Uppgifter i fysik.

1. En smal, jämntjock och homogen stång är i ett vertikalplan rörlig omkring en i stångens nedre ända anbragt horisontell axel (gångjärn). Stångens övre ända stöder mot en med axeln parallell, vertikal vägg, och dess längdriktning bildar därvid vinkeln 60° med horisontalplanet. Angiv (såväl numeriskt som genom en enkel teckning) riktningen av stångens tryck mot axeln. Från friktion bortses.
2. En hiss antages bliva igångsatt lodrätt uppåt med likformigt accelererad rörelse och därefter stiga med en konstant hastighet av 1,5 m/sek. Vilken är den kortaste sträcka, under vilken accelerationen får äga rum, om hissen jämte belastning väger 800 kg och bärlinan icke bör utsättas för större påfrestning än 1 000 kgf? Tyngdkraftens acceleration är 9,81 m/sek². Från friktion bortses.
3. För mätning av den relativa fuktigheten användes vid ett tillfälle en stor glasflaska, i vars hals insatts en gummipropp med tre hål, ett avsett för en med kran försedd tratt, ett för ett till en öppen kvicksilvermanometer ledande rör och ett för en termometer. Den i flaskan inneslutna luften hade från början samma fuktighetsgrad, tryck och temperatur — de bägge sistnämnda resp. 764,0 mm och 22°,0 C — som den yttre. Från tratten tillfördes en ringa mängd koncentrerad svavelsyra, till-

räcklig för att absorbera all i flaskan befintlig vattenånga, varefter kranen stängdes. Efter någon tid, sedan vattenångan fullständigt absorberats av syran, angav manometern ett undertryck av 12,4 mm, samtidigt som termometern utvisade 22°,8 C och barometerståndet ändrats till 761,3 mm. Beräkna den relativa fuktigheten vid försökets början, då vattenångans maximitryck vid 22°,0 C är 19,8 mm. Ingen hänsyn behöver tagas till de volymförändringar, som härröra från glasets utvidgning, tillförseln av svavelsyra och kvicksilverpelarens lägeändring, ej heller behöver temperaturkorrektion vidtagas för manometeravläsningen. Gasernas värmeutvidgningskoefficient är $^1/_{273}$.

4. Ett s. k. Ramsdens okular består av tvenne lika beskaffade, plankonvexa linser, placerade på ett avstånd från varandra, som är $\frac{2}{3}$ av vardera linsens brännvidd. Ett dylikt okular med brännvidden 6,0 cm hos vardera linsen användes i en kikare, kombinerat med ett objektiv med brännvidden 22,5 cm. Kikaren är inställd på ett avlägset föremål, och bilden förlägges av observatören långt bort. Beräkna kikarens längd från objektivet till den närmast ögat befintliga okularlinsen. Samtliga linser kunna betraktas såsom tunna.

5. En plankonvex lins har formen av ett sfäriskt segment med höjden 10 mm. Den sfäriska ytans radie är 50 mm. Ett knippe parallellt, enfärgat ljus infaller i huvudaxelns riktning mot den plana begränsningsytan. Knippets olika strålar träffa efter brytningen icke huvudaxeln i en och samma punkt. En uppfattning om storleken av den s. k. sfäriska avvikningen för knippet kan man erhålla genom att beräkna avståndet mellan den bild, som centrala strålar alstra, och skärningspunkten mellan axeln och en stråle, som vid infallandet träffat linsens yttersta rand. Beräkna på detta sätt den sfäriska avvikningen. Glasets brytningsexponent antages vara 1,50.

6. En galvanometer har motståndet 7,20 ohm och ger på en skala ett utslag av 37,5 mm för en strömstyrka av $67{,}5 \cdot 10^{-7}$ amp (likström). Man önskar för vissa mätningar, att varje millimeters utslag skall motsvara jämnt 10^{-6} amp. Hur skall man åstadkomma detta, om för ändamålet manganintråd med motståndet 1,30 ohm per decimeter finnes tillgänglig? Utslaget på skalan är proportionellt mot strömstyrkan.

7. Ett motstånd AB på 100 ohm är direkt anslutet till ett likströmsnät med 220 volts konstant spänning. Mellan A och en längs motståndstråden förskjutbar glidkontakt C äro två ledningar parallellt inkopplade, den ena innehållande en voltmeter (med

stort motstånd), den andra en båglampa. Glidkontakten är inställd så, att voltmetern, innan kolspetsarna i båglampan närmats till varandra, visar 154 volt. Sedan båglampan tänts, anger voltmetern vid oförändrat läge hos glidkontakten en spänning, som efter en stund vuxit från 56 till 63 volt. Beräkna den ändring i motstånd, som båglampan härvid undergått.

8. I en strömbana äro i serie inkopplade ett induktionsfritt motstånd (A) på 10 ohm och en spole med självinduktion (B). Då sinusformad växelström av visst periodtal genomgår systemet, är i B fasförskjutningen mellan ström och spänning 20°. Vid ett tillfälle förbrukar spolen B 79 watt vid en effektiv spänning av 34 volt. Vilket är det högsta ögonblickliga värde, som spänningen mellan A:s ändpunkter därvid antager?

Resultat: 1. 73°,9. 2. 0,46 m. 3. 72,2 %. 4. 28 cm. 5. 5,18 cm. 6. 1,22 dm. 7. 2,54 ohm. 8. 35,0 volt.

Realexamen V. T. 1935.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\left(\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{2x}{3}\left(x-\frac{3-x}{2}\right)=1\tfrac{1}{4}.$$

2. En handlande köper 100 kg äpplen för 9 kr. Vid försäljningen måste $\frac{1}{5}$ av partiet kasseras, men resten lyckas han sälja för 10 öre per liter. Huru många procent utgör hans vinst, om $1\frac{1}{2}$ liter äpplen väga 1 kg?

3. A. skall den 21 februari betala 3 882 kr. 61 öre till B. Av denna anledning säljer A. samma dag till 98 % kurs 4 st. 3,5 % obligationer, var och en å nominellt 1 000 kr. och med ränteterminer 15 juni och 15 december. I provision får han till mäklaren betala $\frac{1}{10}$ % av kursvärdet. Huru mycket får A. över, sedan han betalt skulden till B.?

4. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{3}\right):\left(y-\frac{2}{3}\right)&=\left(x-\frac{1}{2}\right):\left(y-\frac{5}{4}\right)\\(x+3)^2-9(y-1)^2&=(x+3y)(x-3y)+78\end{aligned}\right\}.$$

5. Blandas en dyrare kaffesort med en billigare i viktsförhållandet 2 : 1, blir blandningen värd 3 kr. 20 öre per kg. Blandas däremot respektive kaffesorter i viktsförhållandet 3 : 5, fås en bland-

ning, som är värd 2 kr. 85 öre per kg. Vad är de båda kaffesorternas pris per kg?

6. Ett fartyg, som är ute på spaning i öppen sjö, håller under den första timmen nordostlig, under den andra ostlig och under den tredje timmen sydlig kurs. Huru långt från utgångspunkten befinner sig fartyget efter de tre timmarna? Hastigheten har hela tiden varit 30 km i timmen.

7. I en rätvinklig låda, som är 1 m lång, 25 cm bred och 20 cm hög, kan en mycket smal, rak stång nätt och jämnt få plats. Vilken längd skall en 35 cm bred och 14 cm hög låda minst ha för att kunna rymma samma stång? De angivna måtten äro invändiga.

8. En cirkel är inskriven i en rätvinklig triangel, vars kateter äro 18 och 24 cm. Till cirkeln drages en med hypotenusan parallell tangent. Huru stora äro de delar, i vilka den rätvinkliga triangeln delas av denna tangent?

Resultat: **1.** $x = 3$. **2.** $33\frac{1}{3}$ %. **3.** 59 kr. 14 öre. **4.** $x = 4$; $y = 3$. **5.** 3 kr. 60 öre; 2 kr. 40 öre. **6.** $10\sqrt{27} = 52$ km. **7.** 98 cm. **8.** 6 cm² och 210 cm².

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

1. Med hur stor hastighet skall en snöboll kastas rätt uppåt för att höja sig 40 meter över utgångspunkten? Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek². Ingen hänsyn tages till luftmotståndet.

2. Vid en kork i form av en rak cylinder med 30 mm diameter och 40 mm höjd har man fäst en nyckel av järn, som väger 24 gram. Kommer korken med nyckeln att flyta eller sjunka, om man tappar den i sjön? Spec. vikten för kork är 0,25 och för järn 7,5; $\pi = 3{,}14$.

3. En motor, som avger en effekt på 10 hästkrafter, driver en lyftkran. Hur många meter i minuten kan lyftkranen höja en tyngd av 1 500 kgf lodrätt uppåt, då lyftkranens verkningsgrad är 60 procent? 1 hästkraft = 75 kgm/sek.

4. Ett isstycke av 0° temperatur har formen av en parallellepiped, som är 40 cm lång, 30 cm bred och 20 cm hög. Hur stor värmemängd erfordras för att smälta isstycket och uppvärma smältvattnet till 6°? Isens specifika vikt är 0,92 och dess smältvärme 80.

5. En vichyvattensflaska, som innehåller torr luft, tillslutes vid 762 mm barometerstånd och 17° temperatur. Hur stort blir trycket i flaskan, om den får stå en längre stund i ett ångbad med 97° temperatur? Flaskans rymd antages oförändrad. Luftens temperaturkoefficient är $\frac{1}{273}$.
6. Med en elektrisk doppvärmare uppvärmes 1 liter vatten från 10° till 100°. Hur mycket kostar uppvärmningen, då 90 procent av den tillförda energien kommer vattnet till godo och då den elektriska energien kostar 25 öre per kWh? 1 wattsek = 0,25 gramkalorier.
7. För en glödlampa, som är stämplad: 3,5 volt och 0,25 amp., användes ett torrelement med elektromotoriska kraften 4,5 volt. Med hur stort inre motstånd i elementet har fabrikanten räknat?
8. I ett belysningsnät ändras spänningen mellan 126 volt och 135 volt. Hur många watt förbrukar en glödlampa vid den högre spänningen, då den vid den lägre förbrukar 60 watt? Lampans motstånd antages vara detsamma i båda fallen.

Resultat: **1.** 28 m/sek. **2.** Flyter. **3.** 18 m/min. **4.** 1900 kgkal. **5.** 972 mm. **6.** 2,9 öre. **7.** 4 ohm. **8.** 68,9 watt.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.[1]

1. Visa genom en enkel skiss, hur en vanlig encylindrig ångmaskin är konstruerad och redogör genom en kort beskrivning för verkningssättet samt hur hastigheten regleras.

   Nämn de huvudsakliga faktorer, som äro bestämmande för maskinens effekt.
2. En motor gör 500 varv i minuten och är försedd med en remskiva, vars diameter är 450 mm. Genom bromsning har utrönts, att periferikraften kan uppgå till 90 kgf. Hur många hk kan motorn sålunda utveckla?
3. En vanlig axelledning skall göra 300 varv i minuten och överföra 25 hk. Hur grov bör den lämpligen vara? Visa genom en enkel skiss i lämplig skala, hur axeln bör vara delad och hur

[1] Tid: 6 tim. Tillåtna hjälpmedel: vissa handböcker och lektionsanteckningar. För betyget godkänd fordras, att minst två av uppgifterna 1—6 och minst en av uppgifterna 7—9 äro nöjaktigt behandlade.

lagren böra placeras, om axelledningen är 20 meter lång och den remskiva, genom vilken kraften tillföres, sättes vid axelledningens mitt.

4. En vinsch har en lintrumma, vars diameter är 20 cm. Den är konstruerad med enkel kuggväxel. Stora hjulet har 54 kuggar och drevet har 12. För drivningen finnas 2 vevar, vardera 35 cm långa. Visa genom en enkel skiss, hur vinschen kan vara anordnad. Periferikraften i vardera veven antages vara i medeltal 15 kgf och vridningshastigheten 40 varv i minuten.

   Hur stor blir då lyfthastigheten?

   Hur stor last skulle därvid kunna lyftas: a) Om man bortser från friktionen? b) Om friktionsförlusten i lager och kugghjul m. m. uppgår till 20 % av det tillförda arbetet?

   Vilken lina skulle var lämplig?

   Om man i stället för lina väljer kortlänkad kätting, hur grov bör den vara?

   De två sista frågorna kunna lämnas obesvarade, om lämplig handbok ej finnes tillgänglig.

5. En cylindrisk behållare, 1,8 m i diameter, helsvetsad av vanlig martinplåt, 9 mm tjock, skall användas som behållare för komprimerad luft. Hur många atmosfärers övertryck kan man tillåta i behållaren, om spänningen i plåten får uppgå till högst 8 kg per mm^2?

6. Till en gängskärningssvarv, vars ledarskruv har 3 gängor per engelsk tum, hör en uppsättning växelhjul med kuggantalen: 20, 25, 30, 39, 40, 55, 60, 70, 100 och 127. En skruv med 5 mm stigning skall svarvas. Vilka växelhjul (satshjul) böra för detta ändamål användas och var på svarven skola de placeras? Rita en skematisk skiss över hjulens placering i förhållande till varandra.

7. Visa genom en enkel skiss i lämplig skala exempel på hur en yttervägg i ett mindre boningshus av trä kan vara konstruerad. Beskriv i korthet konstruktionen med angivande av de olika delarnas benämningar. Angiv vilka fördelar en så utförd vägg har i jämförelse med andra slag av ytterväggar.

8. Vilka materialier användas i vanlig betong? I vilken proportion böra de olika materialierna ingå i exempelvis en betonggrund för en enkel husbyggnad? Hur tillgår blandningen, när arbetet bedrives med handverktyg?

9. Visa genom en enkel skiss i lämplig skala, hur ett bjälklag av trä i ett vanligt boningshus kan vara konstruerat. Angiv benämningarna å bjälklagets olika delar.

Vilka materialier kunna ifrågakomma för fyllning i ett sådant bjälklag?

Angiv de olika materialiernas fördelar och nackdelar i olika avseenden.

Resultat: 2. 14,1 hk. 3. Härtill användes lämpligen en 65 mm axel, delad med två axelkopplingar i tre ungefär lika längder och upplagd på 7 st. lager, av vilka det mittersta placeras intill remskivan. 4. Lyfthastigheten = 5,6 m/min. Lasten: a) 470 kgf b) 375 kgf. Härtill användes lämpligen: 1:o ståltrådslina, 141-trådig, 8 mm diam., 130 kgf/mm² brotthållfasthet. 2:o Manillatåg, 12 mm diam. 3:o Kortlänkad kätting, 6 mm diam. 5. 8 atm. övertryck. 6. Spindel 60 kuggar; mellanaxel 20 kuggar, dito 25 kuggar; ledarskruv 127 kuggar.

(Forts. från sid. 140.)

Fysiska Sällskapet, ordf. docent Erik Bäcklin, v. ordf. docent Gunnar Kellström.

Föredrag: docent H. Alfvén, Vacuumgnistan ($^{15}/_{5}$).

Kemiska Sällskapet, ordf. doc. P. Nylén, sekr. fil. lic. A. Fredga.

Föredrag: fil. lic. S. Brohult, Kärnreaktioner ($^{12}/_{2}$); fil. lic. J. A. Reuterskiöld, Glaselektroden ($^{7}/_{5}$).

Den Bertrandska paradoxen.

Av HENRIK PETRINI.

BERTRAND har uppställt följande problem:

Man drar en godtycklig korda i en cirkel. Vad är sannolikheten för att den är längre än sidan i den inskrivna liksidiga triangeln?

På detta problem ger han följande tre mot varandra stridande lösningar: [1]

»*Första lösningen.* På grund av symmetrin kan man anse kordans riktning vara given; skärningspunkten mellan kordan och den mot den givna riktningen vinkelräta diametern bör då befinna sig på ett stycke av diametern, som är lika med halva diameterns längd (ty avståndet från medelpunkten till den inskrivna liksidiga triangelns sida är lika med halva radien); sannolikheten är alltså $\frac{1}{2}$.

Andra lösningen. På grund av symmetrin kan man antaga, att en av kordans ändpunkter på cirkellinjen är given. Tangenten i denna punkt och de båda sidor i den inskrivna liksidiga triangeln, vilka gå genom punkten, bilda tre vinklar på 60°. Kordans riktning bör falla inom en av dessa tre vinklar, men inte inom någon av de andra; sannolikheten är alltså $\frac{1}{3}$.

Tredje lösningen. För att bestämma läget av en korda räcker det att bestämma dess mittpunkt. För att kordan

[1] Se E. BOREL »Eléments de la théorie des probabilités», Paris 1924, sid. 106—107.

skall kunna uppfylla det givna villkoret, måste dess mittpunkt befinna sig inuti en med den givna cirkeln koncentrisk cirkel med hälften så stor radie. Ytan av denna cirkel är fjärdedelen av den givna cirkelns yta; sannolikheten är alltså $\frac{1}{4}$».

Här gör, som man ser, varje särskild lösning anspråk på att vara *fullt generell,* och Borels försök att komma ifrån svårigheten med att hänvisa till olika metoder att »precisera det sätt, varpå det experimentella verifierandet skall utföras» går på sidan av saken. Å andra sidan har man velat använda denna paradox som ett bevis för att sannolikhetskalkylens grunder äro felaktiga. Men den närmast till hands liggande lösningen av gåtan är naturligtvis den, att minst två av de givna lösningarna på problemet måste vara felaktiga.

Sannolikheten definieras som förhållandet mellan antalet gynnsamma fall och antalet möjliga fall. För att inte få oändligt många fall vid geometrisk sannolikhet låter man en punkt på en yta representeras av ett litet ytelement och beräknar ett approximativt värde på sannolikheten, varefter man gör en limesövergång.[1] Delar man alltså in cirkelns yta i en mängd *lika stora* ytelement och låter varje element representera mittpunkten på en korda, så måste alla dessa element i detta problem betraktas som likvärdiga, när det endast gäller att hålla reda på antalet *olika* kordor. Härav följer omedelbart, att *den tredje lösningen är riktig* i detta fall.

Även i de två första lösningarna räknar man endast med olika kordor, och då följer det med nödvändighet, att dessa måste vara oriktiga. Det gäller alltså bara att finna felen.

Den första lösningen (fig. 1). Låt *OA* vara en radie i den givna cirkeln och *OB* en radie, som bildar en liten vinkel

[1] Jfr H. Petrini »Om geometrisk sannolikhet», Elem. mat. etc. *1934*, sid. 40—42.

$\delta\vartheta$ med OA. Hänvisningen till symmetrin innebär, att man först betraktar den grupp kordor, som äro vinkelräta mot OA, delar in OA i en mängd lika stora element δr och låter varje sådant element svara mot en enda korda. Sedan betraktar man den grupp kordor, som äro vinkelräta mot OB etc. hela cirkeln runt, varvid man för varje gång får $s = \frac{1}{2}$.

Men vid denna beräkning av antalet kordor har *man inte tagit med de kordor, vilkas mittpunkter falla inuti de resp. sektorerna* AOB etc., och vilkas antal är oändligt stort av högre ordning än de förras.

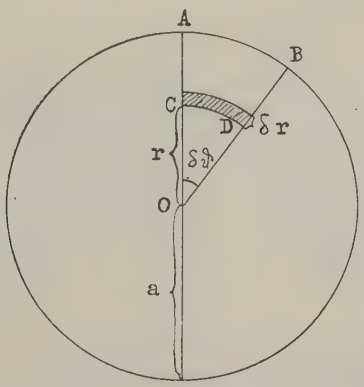


Fig. 1.

Om man rättar detta fel och låter OA även representera mittpunkterna på den grupp kordor, vilkas mittpunkter falla inuti sektorn OAB, så kommer en punkt C på OA att representera en båge CD och linjeelementet δr vid C representerar ett element av en cirkelring vid CD. Men det senare är proportionellt mot OC, d. v. s. mot r, vadan *antalet kordor inte är jämnt fördelat utefter* OA, om alla försummade kordor skola räknas med. Rättas felet, så att man tilldelar varje element av OC en vikt, som är proportionell mot r, så återfås resultatet i den tredje lösningen.

Felet är precis detsamma som om man hade velat beräkna förhållandet mellan ytorna av två koncentriska cirklar på följande sätt:

»På grund av symmetrien är det tillräckligt att betrakta de ytelement, som falla utefter en viss radie. Förhållandet mellan ytorna är alltså = förhållandet mellan radierna».

Den andra lösningen (fig. 2) lider av samma principiella fel. Låt PQ vara en korda i den givna cirkeln, vars radie PO är $= a$, och låt ϑ vara $\angle OPQ$. Låt vidare R vara kordans mittpunkt, $\therefore r = OR = a \sin \vartheta$. Låt vidare R' vara mittpunkten på kordan PQ', och sätt $\angle QPQ' = \delta\vartheta$, som antas vara liten. Då är RR' ett bågelement av en halvcirkel $ORR'P$, och man finner $RR' = a \cdot \delta\vartheta$, $\angle R'RP = \frac{\pi}{2} - \vartheta$.

Flyttas P till en närbelägen punkt P_1 på den givna cirkellinjen och dragas kordorna P_1Q_1 och P_1Q_1' så, att $\angle OP_1Q_1 = \vartheta$, $\angle Q_1P_1Q_1' = \delta\vartheta$, så ligga dessa kordors mittpunkter R_1 och R_1' på de cirkellinjer, som beskrivas med OR och OR' till radier resp. Alla kordorna bli tangenter till resp. cirkellinjer; RR_1 och $R'R_1'$ äro bågelement av cirklarna, och om $\delta\varphi = \angle POP_1$, så är $RR_1 = r \cdot \delta\varphi = a \sin \vartheta \cdot \delta\varphi$.

Fyrhörningen $RR_1R_1'R'$ är approximativt en parallellogram med sidan $RR_1 = r \cdot \delta\varphi$ och höjden $\delta r = a \cdot \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta$, $\therefore$ ytan $= a^2 \cdot \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta \cdot \delta\varphi$. Antalet kordor, vilkas mittpunkter falla inuti denna yta, är proportionellt mot ytan och alltså mot $a^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$ som är funktionaldeterminanten för R:s koordinater ϑ, φ.

Om man nu både ökar ϑ med $\delta\vartheta$ och flyttar P till P_1, så kan kordans mittpunkt falla var som helst inuti denna parallellogram, och det mot denna ändring svarande antalet kordor är således proportionellt mot $\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta$. *Varje vinkelement* $\delta\vartheta$ *bör alltså tilldelas en vikt* $\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$, och det är denna som har försummats vid den andra lösningen.

I såväl den första som den andra lösningen har problemet

sålunda behandlats efter samma grunder som om det endast varit en enda frihetsgrad i stället för två, i det man har nonchalerat de komplikationer, som den andra frihetsgraden medfört, nämligen funktionaldeterminanten vid övergång från ortogonala koordinater till de aktuella koordinaterna. I båda fallen ligger felet i hänvisningen till symmetrin, som gjorts på ett felaktigt sätt. Rättelse härutinnan kan göras sålunda:

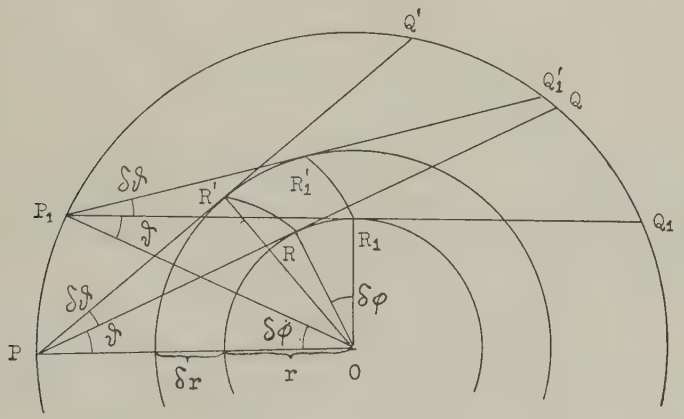


Fig. 2.

1:o kordan får avvika från en given riktning med en vinkel, som är mindre än en given vinkel, hur liten som helst.

2:o kordan skall gå genom ett givet bågelement av den givna cirkeln, hur litet som helst.

Hittills har det endast varit fråga om beräkning av antal olika kordor, men alls inte om olika sätt att dra kordorna. Så till vida är problemet ofullständigt formulerat, att det ingenting utsäges härom. Olika metoder att dra kordorna kunna nämligen inverka på resultatet, men endast därigenom att en och samma korda kan dragas på olika sätt och alltså bör tagas med i räkningen så många gånger som antalet sätt, varpå den kan dragas.

Exempel I. Kordan skall dragas från en godtycklig punkt på cirkeln i en godtycklig riktning. I detta fall medräknas varje korda endast *en* gång, $\therefore s = \frac{1}{4}$.

II. Man lägger en linjal hur som helst över cirkeln och drar kordan efter linjalen. Samma resultat.

III. Man sammanbinder en godtycklig punkt på cirkellinjen (radie $= a$) med en godtycklig punkt i planet och anser alla punkter i planet likvärdiga. Man tänker sig först, att »punkten i planet» skall befinna sig inom en koncentrisk cirkel med radien $R (R \geqq a)$. Sammanbindningslinjen drages ut, så att den blir en korda i denna cirkel. Samma korda erhålles, om man förenar den godtyckliga punkten på cirkellinjen med vilken annan punkt som helst på kordan. Vid beräkningen av antalet gynnsamma fall och antalet möjliga fall bör således varje korda tilldelas en vikt, som är proportionell mot kordans längd. Man finner

$$s = \frac{R^3 - \left(R^2 - \frac{1}{4}a^2\right)^{3/2}}{R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2}}, \quad \lim_{R=\infty} s = \frac{1}{4}.$$

IV. Man sammanbinder två godtyckliga punkter i planet och medräknar endast de linjer som råka den givna cirkeln. Har en korda i den största cirkeln (radie $= R$) $n + 1$ punkter, bör den räknas med $n\frac{(n-1)}{2}$ gånger. Alltså bör varje korda, om n är stort, tilldelas en vikt, som är proportionell mot kordans kvadrat. Man finner

$$s = \frac{2R^2 - \frac{1}{4}a^2}{2R^2 - a^2} \cdot \frac{1}{4}, \quad \lim_{R=\infty} s = \frac{1}{4}.$$

Studium av syrors och basers dissociation med användning av färgindikatorer.

Några uppgifter för enskilt arbete i kemi på gymnasiet.

Av BERTIL ENGLUND.

Den elektrolytiska dissociationsteoriens tillämpningar på syror och baser i vattenlösning erbjuder många uppgifter av såväl teoretiskt som praktiskt intresse. I det följande skall dels givas en allmän orientering över de teoretiska frågorna med särskild hänsyn till den matematiska behandlingen av neutralisationsprocessen, dels genomgås några försök, som kunna utföras med enkla experimentella hjälpmedel och ej ställa för stora krav på förkunskaperna. Redan från början vill jag därvid påpeka, att framställningen på alla punkter är elementär — sålunda upptagas ej till diskussion de viktiga modifikationer av den klassiska dissociationsteorien, vilka blivit följden av senare års forskningar över elektrolyterna. Syftet med denna uppsats är främst att påvisa, huru några av syrornas och basernas fundamentala egenskaper kunna belysas med ganska enkla kvantitativa experiment — för studiet av teorierna och detaljer i metodiken finnes f. n. en mycket rik litteratur, till vilken hänvisningar givas i uppsatsens slut.

1. I en utspädd vattenlösning av en svag syra HA finnas vätejoner $H^{\cdot}$, uppkomna vid reaktionen

$$HA \rightleftarrows H^{\cdot} + A'.$$

Vätejonernas kemiska verkan — deras aktivitet såsom man med en modern term uttrycker det — är enligt den klassiska dissociationsteorien proportionell mot deras koncentration. Måttet på en syras styrka är alltså lösningens *vätejonkoncentration,* vilken bestämmes av massverkningslagen medelst ekvationen

$$\frac{[H^{\cdot}] \cdot [A']}{[HA]} = K, \qquad (1)$$

där uttrycken inom kantiga parenteser beteckna resp. koncentrationer, uttryckta i gramjoner, resp. grammolekyler per liter, och K är ett för syran karakteristiskt siffervärde, syrans *dissociationskonstant.* Om man till denna sura lösning sätter en bas, t. ex. ur en byrett tilldroppar den starka basen NaOH, minskas givetvis lösningens halt av fria vätejoner succesivt, eftersom de förena sig med OH'-joner från basen. Man erhåller vid ett visst tillfälle, *ekvivalenspunkten,* nämligen då en mot syrans totala koncentration exakt svarande mängd av basen tillförts, en lösning av neutralsaltet NaA, och får, om sedan ännu mera bas tillföres, en alltmera alkalisk lösning. För hela detta förlopp, neutralisationen, gäller villkoret om elektroneutralitet beträffande jonerna, d. v. s.

$$[H^{\cdot}] + [Na^{\cdot}] = [A'] + [OH']. \qquad (2)$$

Jämte vattnets dissociationsekvation

$$[H^{\cdot}] \cdot [OH'] = K_v, \qquad (3)$$

där K_v kallas vattnets jonprodukt, utgöra ekv. (1) och (2) det matematiska uttrycket för neutralisationsförloppet.

Beräkningen av $[H^{\cdot}]$ för varje tillfälle under förloppet utföres med hjälp av ekv. (1). Om man tillfört så mycket av basen att n % av syran neutraliserats och om det uppkomna saltet anses vara fullständigt dissocierat (d. v. s. alla tillförda $Na^{\cdot}$-joner antagas fortfarande vara »fria»), har man

$$[A'] = \frac{n}{100} \cdot c \text{ och } [HA] = \frac{100 - n}{100} \cdot c,$$

varvid syrans totala (analytiska) koncentration, $[A'] + [HA]$, betecknats med c. Ekv. (1) ger då

$$[H^{\cdot}] = K \cdot \frac{100 - n}{n}. \qquad (4\,A)$$

Denna ekv. kan efter logaritmering skrivas

$$pH = pK + \log \frac{[salt]}{[syra]}, \qquad (4\,B)$$

om *vätejonexponenten pH,* definierad enl.

$$pH = -\log [H^{\cdot}]$$

införes och i analogi därmed sättes

$$pK = -\log K.$$

Med [salt] menas här givetvis totala koncentrationen av det vid neutralisationen uppkomna saltet NaA, med [syra] koncentrationen av den återstående, ännu ej neutraliserade delen av syran.

Ett bekvämt sätt att ange en lösnings surhetsgrad har man i funktionen pH, som — särskilt om man önskar representera neutralisationsförloppet grafiskt — skall visa sig värdefull. En blick på tabell 1, i vilken bl. a. några för neutralisation av ättiksyra beräknade $[H^{\cdot}]$-värden upptagas, visar, att vätejonkoncentrationen under reaktionen genomlöper ett alltför stort område för att med fördel kunna återges grafiskt. I en 0,1-normal lösning av ättiksyra, som alltså håller 6 gr CH_3COOH per liter, finnes, såsom nedan skall visas, ungefär 0,001 gr $H^{\cdot}$ per liter, men i den helt neutraliserade lösningen en million gånger mindre.

I viss mån avvikande gestalta sig de nu diskuterade förhållandena, då en stark syra, t. ex. saltsyra, neutraliseras. De starka syrorna anses vara fullständigt eller mycket nära

Tabell 1.

Neutralisationsförloppet.

Neutralisationsgrad	Ättiksyra $K = 10^{-4,75}$ $c = 0,1$		Saltsyra $c = 0,1$		Saltsyra $c = 0,0001$	
n	$[H^+]$	pH	$[H^+]$	pH	$[H^+]$	pH
0 %	$1,35 \cdot 10^{-3}$	2,87	10^{-1}	1	10^{-4}	4
25	$5,37 \cdot 10^{-5}$	4,27	$7,5 \cdot 10^{-2}$	1,12	$7,5 \cdot 10^{-5}$	4,12
50	$1,78 \cdot 10^{-5}$	4,75	$5,0 \cdot 10^{-2}$	1,30	$5 \cdot 10^{-5}$	4,30
75	$5,89 \cdot 10^{-6}$	5,23	$2,5 \cdot 10^{-2}$	1,60	$2,5 \cdot 10^{-5}$	4,60
90	$2,0 \cdot 10^{-6}$	5,70	10^{-2}	2	10^{-5}	5
95	$9,33 \cdot 10^{-7}$	6,03	$5 \cdot 10^{-3}$	2,30	$5 \cdot 10^{-6}$	5,30
99	$1,78 \cdot 10^{-7}$	6,75	10^{-3}	3	10^{-6}	6
100	$1,35 \cdot 10^{-9}$	8,87	10^{-7}	7	10^{-7}	7
101	10^{-11}	11	10^{-11}	11	10^{-8}	8
110	10^{-12}	12	10^{-12}	12	10^{-10}	10

fullständigt dissocierade i sina joner, inga molekyler förekomma alltså i lösningen och ekv. (1) har icke giltighet. Beräkningen av $[H^+]$ är emellertid under de givna förutsättningarna mycket enkel. Om n som förut betecknar neutralisationsgraden i procent och c syrans totalkoncentration, gäller (för $0 < n < 100$)

$$[H^+] = \frac{100 - n}{100} \cdot c.$$

I tabell 1 har för jämförelsens skull upptagits de för saltsyra i två olika koncentrationer beräknade värdena. I fig. 1 äro motsvarande *neutralisationskurvor* uppritade, varvid som abskissa valts neutralisationsgraden i procent av syrans totalmängd (approx. prop. mot volymen av den tillsatta basen) samt som ordinata pH. Den åtminstone i första hand mest påfallande egenskapen hos dessa kurvor torde vara uppträdandet av en mer eller mindre utpräglad »knick» vid 100 % neutralisation. Det är, såsom framgår av det följande, just uppträdandet av en sådan relativt hastig ändring av pH vid ringa bastillsats, som utgör förutsättningen för att ekvivalenspunkten skall kunna fastställas skarpt med

färgindikatorer eller på annat sätt. Olikheterna i kurvornas utseende för svaga och starka syror torde observeras. I fortsättningen behandlas — om ej annat säges — svaga syror, för vilka ekv. (1) gäller.

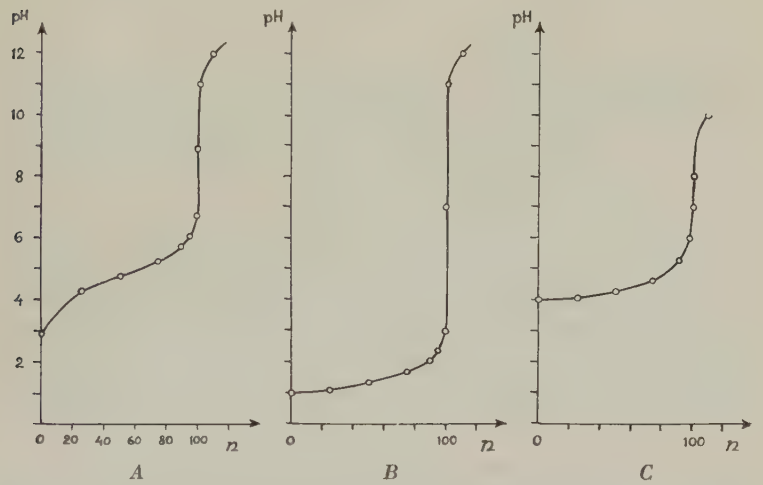


Fig. 1. Neutralisationskurvor: *A*. ättiksyra c = 0,1 mol/liter; *B*. saltsyra c = 0,1 mol/liter; *C*. saltsyra c = 0,0001 mol/liter. Abskissan anger neutralisationsgraden i procent av syrans totalkoncentration. Ringarna utmärka de i Tabell 1 beräknade punkterna.

2. För några viktiga punkter, som äro karakteristiska för neutralisationskurvorna, kan man härleda enkla uttryck för $[H^+]$ och pH, uttryck, som ur praktisk synpunkt visa sig betydelsefulla.

$[H^+]$ i syrans rena vattenlösning: Om syran är obetydligt dissocierad (K är ett mycket litet tal) är givetvis den odissocierade syrans koncentration [HA] praktiskt taget lika med syrans totalkoncentration. Om man vidare observerar, att i en lösning, som endast innehåller elektrolyten HA, $[H^+] = [A^-]$, fås enl. (1)

$$[H^+] = \sqrt{K \cdot c} \text{ eller } pH = \tfrac{1}{2}\, pK - \tfrac{1}{2} \log c. \qquad (5)$$

[H˙] vid halv neutralisation med stark bas: Enl. (4) fås, om n = 50

$$[H^{\cdot}] = K \text{ eller } pH = pK. \qquad (6)$$

I fig. 1 är detta enkla samband synligt för ättiksyra med pK = 4,75.

[H˙] vid fullständig neutralisation med stark bas (ekvivalenspunkten): Enligt den elementäraste framställningen av reaktionen mellan syror och baser skulle här föreligga en »neutral» löning av neutralsaltet NaA. Det är emellertid väl bekant, att åtskilliga neutrala salter, t. ex. $Al_2(SO_4)_3$ och Na_2CO_3, alls icke i lösning ha neutral reaktion utan på grund av hydrolys innehålla fria H˙ resp. OH′. Genom tillämpning av massverkningslagen på hydrolysjämvikten erhålles uttrycket för [H˙] i lösningen. Här skall som exempel blott behandlas ett fall, saltet NaA av en svag syra HA. Reaktionen är då denna

$$Na^{\cdot} + A' + H^{\cdot} + OH' \rightleftarrows Na^{\cdot} + HA + OH'$$

eller, om oförändrade joner uteslutas

$$A' + H^{\cdot} \rightleftarrows HA,$$

varav jämviktsvillkoret

$$\frac{[HA]}{[A'] \cdot [H^{\cdot}]} = \frac{1}{K}.$$

Men enligt den fullständiga reaktionsformeln måste gälla

$$[HA] = [OH'],$$

enär dessa uppstå samtidigt, och enl. (3) är

$$[OH'] = \frac{K_v}{[H^{\cdot}]}, \text{ varav } [H^{\cdot}]^2 = \frac{K \cdot K_v}{[A']}.$$

Det återstår att bestämma [A′], koncentrationen av det hydrolytiskt ej sönderdelade saltet. Om hydrolysen ej är särdeles

stark, är det tillåtet att som approximation sätta $[A'] = c$, saltets totalkoncentration, och man får

$$[H^+] = \sqrt{\frac{K \cdot K_v}{c}} \qquad (7)$$

eller

$$pH = \tfrac{1}{2}\, pK_v + \tfrac{1}{2}\, pK + \tfrac{1}{2} \log c.$$

K har vid vanlig temperatur värdet 10^{-14}. För salter av svaga enbasiska syror beräknas sålunda pH med för praktiska syften tillräcklig noggrannhet enl.

$$pH = 7 + \tfrac{1}{2}\, pK + \tfrac{1}{2} \log c.$$

pH är alltid här större än 7; »salter av svaga syror och starka baser ha alkalisk reaktion» lyder ju den välbekanta regeln.

Tabell 2 A innehåller en översikt över aciditetsförhållandena i lösningar av syror av olika styrka. Det bör må-

Tabell 2 A.

K	pK	pH i en lösning av syran		pH i en lösning av syrans salt	
		c = 0,1	c = 0,01	c = 0,1	c = 0,01
10^{-2}	2	1,5	2	7,5	(7)
10^{-4}	4	2,5	3	8,5	8
10^{-6}	6	3,5	4	9,5	9
10^{-8}	8	4,5	5	10,5	10
10^{-10}	10	5,5	6	11,5	(11)

Tabell 2 B.

Syra	pK	pH i en lösning av syran; c = 0,01	pH i en lösning av syrans salt; c = 0,01
Salicylsyra	3,0	2,5	7,5
Benzoesyra ..	4,2	3,1	8,1
Ättiksyra	4,8	3,4	8,4
Borsyra	9,2	5,6	10,6

hända påpekas, att de införda approximationerna i formlerna medföra, att tabellvärdena ej äro exakta. En utförligare diskussion och beräkning av hydrolysen finner man hos Ramberg och Bjerrum.

Uppgifterna om pH i saltets lösning ha ett särskilt värde, då det gäller att analytiskt bestämma en syra genom »titrering». Därvid tillföres ur byrett en stark bas av noga känd koncentration, till dess att en tillsatt färgindikator (förr oftast den klassiska indikatorn lackmus, nu fenolftalein eller andra) ändrar färg. Indikatorns färgomslag bör tydligen, om bestämningen skall kunna ske med precision, så vitt möjligt inträffa vid just det pH, som motsvarar ekvivalenspunkten.

För svaga baser gälla uttryck, som äro analoga med dem som ovan härletts för syror. Man definierar dissociationskonstanten K′ för en bas BOH enl.

$$\frac{[B^{\cdot}] \cdot [OH']}{[BOH]} = K'. \qquad (8)$$

Även i basiska lösningar finnas — ehuru det måhända först kan tyckas egendomligt — fria vätejoner. Deras koncentration bestämmes också här av ekv. (3), och man har

$$[H^{\cdot}] = \frac{K_v}{[OH']}.$$

Funktionen pH tjänar alltså också till att ange egenskaperna hos alkaliska lösningar. Utgående från $K_v = 10^{-14}$ erhåller man följande översikt.

pH	lösningen betecknas
2	starkt sur
4	sur
6	svagt sur
7	neutral
8	svagt basisk
10	basisk
12	starkt basisk.

Den »verkliga» neutralpunkten skulle alltså kännetecknas av att $[H^{\cdot}] = [OH^{\prime}] = 10^{-7}$. Begreppen sur, neutral och basisk äro i praktiken mycket subjektiva, rent av ofta i mer än en bemärkelse en — smaksak.

För svaga baser fås också enkla uttryck för de karakteristiska punkterna.

[H·] i basens rena vattenlösning: Man får enl. (8)

$$[OH^{\prime}] = \sqrt{K^{\prime}c},$$

varav med hjälp av (3)

$$[H^{\cdot}] = \frac{K_v}{\sqrt{K^{\prime} \cdot c}} \qquad (9)$$

eller

$$pH = 14 - \tfrac{1}{2}\, pK^{\prime} + \tfrac{1}{2} \log c.$$

[H·] vid halv neutralisation med stark syra:

$$[OH^{\prime}] = K^{\prime}; \quad [H^{\cdot}] = \frac{K_v}{K^{\prime}} \qquad (10)$$

eller

$$pH = 14 - pK^{\prime}.$$

[H·] vid fullständig neutralisation med stark syra (ekvivalenspunkten): Man får

$$[H^{\cdot}] = \sqrt{\frac{K_v c}{K^{\prime}}} \qquad (11)$$

eller

$$pH = 7 - \tfrac{1}{2}\, pK^{\prime} - \tfrac{1}{2} \log c.$$

»Salter av svaga baser och starka syror ha sur reaktion.»

Tabell 3 A innehåller en översikt över egenskaperna hos basiska lösningar under olika omständigheter.

För fullständighetens skull meddelas slutligen uttrycket för vätejonkoncentrationen i lösningen av ett salt BA, som motsvarar såväl en svag syra HA som en svag bas BOH. Hydrolysen

$$B^{\cdot} + A^{\prime} + H^{\cdot} + OH^{\prime} \rightleftarrows HA + BOH$$

Tabell 3 A.

K′	pK′	pH i en lösning av basen		pH i en lösning av basens salt	
		c = 0,1	c = 0,01	c = 0,1	c = 0,01
10^{-2}	2	12,5	12	6,5	(7)
10^{-4}	4	11,5	11	5,5	6
10^{-6}	6	10,5	10	4,5	5
10^{-8}	8	9,5	9	3,5	4
10^{-10}	10	8,5	8	2,5	(3)

Tabell 3 B.

Bas	pK′	pH i en lösning av basen; c = 0,01	pH i en lösning av basens salt; c = 0,01
Silverhydroxid	4	11	6
Ammoniak	4,8	10,6	5,6
Pyridin	8,8	8,6	3,6
Anilin	9,5	8,2	3,2

är naturligtvis starkare än i de förut behandlade fallen. Beräkningen ger

$$[H^{\cdot}] = \sqrt{\frac{K_{,} K}{K'}} \qquad (12)$$

eller

$$pH = 7 + \tfrac{1}{2}\, pK - \tfrac{1}{2}\, pK'.$$

Lösningens reaktion är här oberoende av saltkoncentrationen. Huruvida den är sur eller basisk, beror tydligen på syrans och basens rel. styrkor; den kan i det speciella fall. att dessa äro lika stora, vara »neutral», pH = 7. Så är fallet med t. ex. ammoniumacetat (pK = pK′ = 4,8); vattenlösningen innehåller $NH_4^{\cdot}$- och CH_3COO'-joner, NH_3- och CH_3COOH-molekyler samt $H^{\cdot}$- och OH'-joner i den ringa mängd som rent vatten gör.

3. Då man vill åskådliggöra neutralisationen av en syra med en bas grafiskt, tager man av praktiska skäl gärna den tillsatta volymen bas till abskissa x. Som ordinata har man pH. *Neutralisationskurvans ekvation,* hänförd till x- och pH-axlarna, kan erhållas genom omformning av ekv. (2), »neutralitetsvillkoret»,

$$[Na^{\cdot}] = [A'] + [OH'] - [H^{\cdot}],$$

vilket må skrivas sålunda

$$x = x_A + x_{OH} - x_H. \qquad (13)$$

Abskissan x sammansättes således av tre termer, vilka alla kunna uttryckas som funktioner av $[H^{\cdot}]$. Kurvans ekvation i parameterform (med $[H^{\cdot}]$ som parameter) är alltså allmänt

$$\begin{cases} x = f([H^{\cdot}], c, K); \\ pH = -\log [H^{\cdot}]. \end{cases}$$

Termerna $x_{OH} = \frac{K_v}{[H^{\cdot}]}$ och $x_H = [H^{\cdot}]$ äro med de valda koordinaterna alltid enkla exponentialkurvor, vilkas läge i diagrammet bestämmes av den använda koncentrationsskalan (se fig. 1). Kurvan för $[H^{\cdot}]$ uppritas lämpligen vänd åt den negativa x-axeln.

Termen x_A, som uttrycker, hur koncentrationen av syrans negativa joner ändras med pH, beräknas för en svag syra med hjälp av ekv. (1) och uttrycket för totalkoncentrationen $c = [A'] + [HA]$, (vilken antages vara konstant under titreringen). Man får

för svaga syror: $\qquad x_A = \frac{K \cdot c}{K + [H^{\cdot}]}.$

Kurvgrenen x_A har en horisontell inflexion i punkten $x = \frac{1}{2} c$, $pH = pK$ (jämför ekv. (6)) och närmar sig sedan för större pH-värden asymptotiskt den räta linjen $x = c$, som ju motsvarar fullständig neutralisation.

För en stark syra däremot har man under hela förloppet fullständig dissociation, således

för starka syror: $x_A = c$,

d. v. s. den med pH-axeln parallella räta linjen.

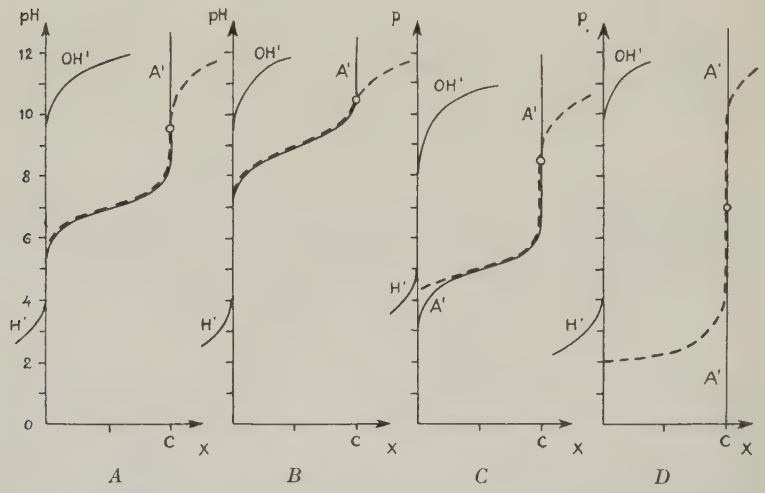


Fig. 2. Exempel på konstruktionen av neutralisationskurvor för syror. *A*. pK = 7, c = 0,01 mol/liter; *B*. pK = 9, c = 0,01 mol/liter; *C*. pK = 5, c = 0,001 mol/liter; *D*. stark syra c = 0,01 mol/liter. De heldragna linjerna representera koncentrationerna av jonerna H^+, OH' och A' i lösningen vid olika pH, d. v. s. de tre termerna i ekv. (13). Den streckade kurvan är den genom grafisk addition i abskissaxelns led erhållna neutralisationskurvan. Ringen utmärker ekvivalenspunkten.

Hela kurvan erhålles genom grafisk addition (i horisontell riktning) av de olika kurvgrenarna. I fig. 2 äro några typiska exempel på neutralisationskurvor uppritade. Det framgår av diagrammen, hur ekvivalenspunkten i överensstämmelse med ekv. (7) och tabell 2 förskjutes mot allt större pH-värden, ju svagare syran är. Det framgår också, att den vertikala inflexionen vid fullständig neutralisation, då x = c, är mer utpräglad, när syran är starkare och har större kon-

centration. Huru dessa förhållanden gestalta sig vid flerbasiska syror, skulle det föra för långt att här skildra; det må endast anmärkas, att man då får flera x-termer, motsvarande de olika jonerna, samt att kurvan ofta, men visst icke alltid, uppvisar flera »knickar», motsvarande bildning av de sura salterna. Vid närvaro av flera syror i lösningen samtidigt kan kurvan fortfarande uppritas genom grafisk addition av de ingående syrornas delkurvor. Den resulterande kurvans form bestämmes huvudsakligen av syrornas dissociationskonstanter — under vissa förhållanden kan den vertikala inflexionen vid $x = c$ helt »maskeras», vid titrering visar sig detta på så sätt, att omslaget blir oskarpt.

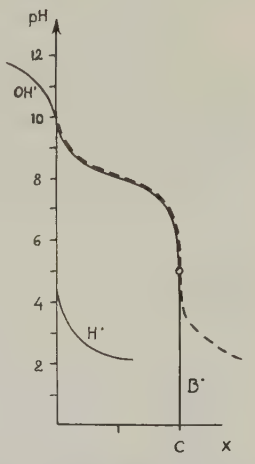


Fig. 3. Exempel på konstruktion av neutralisationskurvan för en bas: $pK' = 6$, $c = 0{,}01$ mol/liter. Jämför fig. 2 samt ekv. (13) och (14).

Förloppet vid neutralisation av en bas BOH med en stark syra HCl åskådliggöres bäst, om den tillsatta volymen syra väljes till abskissa. Då saltet BCl anses fullständigt dissocierat, fås ur neutralitetsvillkoret

$$[Cl'] = [B^{\cdot}] + [H^{\cdot}] - [OH']$$

abskissans värde

$$x = x_B + x_H - x_{OH}. \qquad (14)$$

De tre termerna äro analoga med termerna i ekv. (13); $x_B = \frac{K' c}{K' + [OH']}$ representerar alltså basens dissociationsgrad, har för en svag bas en horisontell inflexion vid $pH = 14 - pK'$ (jämför ekv. (10)) och går asymptotiskt mot linjen $x = c$. Ekvivalenspunktens läge bestämmes av ekv. (11). Fig. 3 visar kurvans förlopp.

Av större betydelse är kännedomen om förloppet av reaktionen mellan en stark syra och saltet av en svag syra, emedan reaktioner av denna typ ofta finna användning inom analysen, t. ex. när saltsyra inställes med borax eller karbonat som titrersubstans. Reaktionen må vara

$$Na^{\cdot} + A' + H^{\cdot} + Cl' = Na^{\cdot} + Cl' + HA.$$

Titreringskurvans ekvation erhålles även här ur neutralitetsvillkoret

$$[Cl'] = [Na^{\cdot}] + [H^{\cdot}] - [OH'] - [A'].$$

Som abskissa x tages den tillsatta syrans volym. Om saltets koncentration är c fås

$$x = c + x_H - x_{OH} - x_A.$$

Uttrycken för de tre senare termerna äro desamma som i ekv. (13). De negativa termerna uppritas som förut åt den negativa x-axeln och den resulterande kurvan fås genom grafisk addition och subtraktion. Vid ekvivalenspunkten innehåller den färdigtitrerade lösningen ett neutralsalt, som under de givna förutsättningarna ej är hydrolyserat, samt en svag syra. Lösningens pH bestämmes alltså av syrans dissociationskonstant enligt ekv. (5).

4. Det har visats i det föregående, att lösningen vid reaktionens slutpunkt, ekvivalenspunkten, kännetecknas av ett bestämt pH-värde, som i enklare fall tämligen lätt kan beräknas numeriskt. Vilka möjligheter har man då att experimentellt fastställa, att detta riktiga pH-värde uppnåtts? Den förnämsta metoden är den *elektrometriska* (potentiometriska). Som den erfordrar en relativt dyrbar apparatur och ställer rätt stora krav på mättekniken, skall den ej upptagas till behandling i denna uppsats. I handböcker och monografier finner den intresserade utförliga anvisningar. När anspråken på noggrannhet ej ställas särskilt högt,

gör den *kolorimetriska* metoden (indikatormetoden) goda tjänster.

Man känner sedan länge ämnen, som antaga olika färg i sur och i basisk lösning — lackmus, färgämnet i té samt åtskilliga fruktsafter kunna anföras som exempel — och antalet av sådana färgämnen har genom systematiskt syntetiskt arbete ökats i mycket hög grad. F. n. äro bortåt 200 *färgindikatorer* bekanta. Eftersom teorien för indikatorer behandlas utförligt i lätt tillgängliga läroböcker (t. ex. kap. 15 hos RAMBERG), skall endast det för denna framställning nödvändiga medtagas här.

De som »pH-indikatorer» användbara färgämnena äro svaga syror (eller baser), vilkas ena jon har annan färg än den odissocierade molekylen. För en indikatorsyra i vattenlösning gälla alltså de för svaga syror förut uppställda ekvationerna. I ekv. (4 A) betecknade n den del av syran, som förelåg som salt, 100 — n den ej neutraliserade delen. Tillämpat på en indikator skall således n betyda den bråkdel, som har »alkalisk färg», 100 — n den bråkdel, som har »sur färg». Sambandet mellan lösningens pH, indikatorns dissociationskonstant och förhållandet mellan de två olikfärgade formernas mängder kan skrivas i analogi med ekv. (4 B)

$$pH = pK + \log \frac{n}{100 - n}.$$

En indikators färgförändringar återges med en kurva av samma form som termen x_A i ekv. (13). Enär indikatorn alltid tillsättes i mycket liten mängd, kommer indikatorns dissociation ej att inverka på lösningens surhetsgrad, fastmer bestämmes indikatorns dissociationsförhållanden av lösningens vätejonkoncentration. Vid ett visst pH antager indikatorn en viss färg, som kontinuerligt förändras åt båda håll inom ett ganska litet pH-område, *indikatorns omslagsintervall*. Intervallets »tyngdpunkt», där hälften av indikatorn har sur och hälften alkalisk färg (således n = 50), är

pH = pK. För några viktiga indikatorer upptagas karakteristiska data i tabell 4.

Tabell 4.

Några vanliga färgindikatorer.

Namn	Dissociationsexponent pK (»Tyngdpunkt»)	Användbar inom omslagsintervallet pH =	»Sur färg»	»Alkalisk färg»	Lämplig lösning
Tymolblått (sur) ..	1,7	1,2—2,8	röd	gul	5 ‰ i alkohol
Metylorange	3,7	3,1—4,4	röd	gul	1 ‰ i vatten
Metylrött	5,1	4,2—6,3	röd	gul	5 ‰ i alkohol
Bromtymolblått ..	7,0	6,0—7,6	gul	blå	»
Fenolrött	7,9	6,8—8,4	gul	röd	»
Tymolblått (basisk)	8,9	8,0—9,6	gul	blå	»
Fenolftalein	9,7	8,3—10,0	färglös	röd	1 % i alkohol
Tymolftalein.....	9,9	9,3—10,5	färglös	blå	»

Observera, att tymolblått har två olika omslagsområden, inalles således tre olikfärgade former.

Valet av en för en viss titrering passande indikator underlättas genom kännedomen om titreringskurvans förlopp. Om en väl utbildad vertikal inflexion uppträder i kurvan, äro omständigheterna gynnsamma för titrering och valet av indikator principiellt enkelt: indikatorns färgomslag skall ligga inom det pH-område, i vilket inflexionen förefinnes. För reaktionen mellan en stark syra och en stark bas ser man i fig. 1 B, att kurvan är nästan rätlinig från pH = 3,5 till pH = 10,5. Praktiskt taget vilken som helst av de i tabellen upptagna indikatorerna kan alltså användas. Det torde dock observeras, att färgomslagets skärpa kan nedsättas betydligt, om svaga elektrolyter (exempelvis kolsyra i vattnet!) äro närvarande. Svaga syror i allmänhet titreras med NaOH med fenolftalein som indikator (fig. 1 A), svaga baser med HCl med metylrött som indikator.

5. *Den kolorimetriska bestämningen av vätejonkoncentrationen* kan ske efter två, principiellt skilda metoder: med eller utan användning av jämförelselösningar, vilkas pH-värde är bekant eller kan beräknas. Mätningen utan sådana jämförelselösningar kan utföras på olika vis, i princip är den enkel och grundar sig på indikatorernas förut omtalade egenskaper. Varje »blandfärg» av en indikators »sura färg» och »alkaliska färg» motsvarar ju ett visst pH-värde. Erfarenheten har visat, att det subjektiva färgintrycket, då man ser samtidigt genom en »surt» och en »alkaliskt» färgad indikatorlösning, är detsamma, som om dessa olikfärgade ämnen verkligen förelågo blandade med varandra i samma lösning. Metoden blir då följande (beskriven närmare i Clark sid. 121—124, 171—172): i ett provrör med rent vatten droppas en viss, noga bestämd mängd av en indikatorlösning (antag a droppar) samt en droppe stark syra, i ett annat likadant provrör med samma volym vatten $10 - a$ droppar av indikatorn samt en droppe stark bas. En serie par av så iordningställda rör (med t. ex. $a = 1$ t. o. m. $a = 9$) ger alltså, då man ser rakt igenom de två sammanhörande rören, en serie jämförelsefärger. Det pH-värde, som varje rörpar ger, beräknas i anslutning till den allmänna ekv. (4):

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK} + \log \frac{\text{antalet droppar i basisk lösning}}{\text{antalet droppar i sur lösning}}.$$

Den lösning, som skall prövas, försättes i ett provrör med *10* droppar av indikatorn, och dess färg jämföres med färgerna i serien. För ett säkrare utförande av jämförelsen kunna rören ställas i passande hål i en träkloss, genom vilken horisontellt gående hål äro borrade. Lösningarna betraktas genom dessa hål; som bakgrund har man ett vitt papper, belyst med dagsljuslampa, om så behöves. — Ett annat förfarande, byggt på samma tankegång, tillämpas vid användandet av den s. k. kilkolorimetern (Bjerrum sid. 31). Beträffande såväl denna som de många förträffliga kolorimetrar av andra typer, som föras i marknaden (och ofta

betinga ett ganska högt pris) får jag hänvisa till utförligare läroböcker och de optiska firmornas broschyrer.

6. *Lösningar med känd vätejonkoncentration,* vilka alltså finna användning som jämförelselösningar, kuna framställas på flera sätt. I anslutning till den föregående allmänna utredningen om syrors förhållande i vattenlösning torde det vara enklast att »konstruera» lösningar med önskat pH-värde med hjälp av ekv. (4 B)

$$pH = pK + \log \frac{[salt]}{[syra]}.$$

Metoden blir då denna: Sätt till en svag syra, vars K-värde är bekant, en viss mängd av syrans natrium- eller kaliumsalt och beräkna pH enligt formeln. Genom lämplig variation av förhållandet [salt] : [syra] kan vätejonkoncentrationen med ganska stor noggrannhet givas önskade värden i ett område omkring pK. Vid härledningen av formeln förutsattes, att $[H^{\cdot}]$ var liten i förhållande till syrans totalkoncentration. I praktiken har man alltså att iakttaga, att lösningen bör göras förhållandevis koncentrerad. Även ur en annan synpunkt är detta av vikt: vid tillsats av mindre mängder av en stark bas eller syra reagerar systemet så, att $[H^{\cdot}]$ ej märkbart förändras — lösningen är som man säger en *vätejonbuffert* (tyska: Pufferlösung, engelska: buffer solution, danska: Stødpude). I områden med god buffertverkan är neutralisationskurvans lutning mot x-axeln liten, i det förut diskuterade fallet, ättiksyra, är alltså buffertegenskapen mest utbildad vid $pH = 4{,}75$ d. v. s. 50 % neutralisation.

De standard-buffertlösningar, som föreslagits av olika författare, äro i regel av noga bestämd koncentration. Ett närmare studium av elektrolyterna har nämligen visat, att såväl vätejonernas aktivitet som indikatorernas dissociation röna inflytande av lösningsmedlet och av närvarande joners elektriska laddningar. Då standardlösningarnas pH-värden

fastställas genom elektrometriska mätningar, som sedan jämföras med kolorimetriska, är det givet, att det för noggranna arbeten är nödvändigt att ha detaljerad kännedom om lösningarnas sammansättning. För demonstration av dissociationslärans grundbegrepp kan man bortse från nyss nämnda komplikationer. En ur praktisk arbetssynpunkt god sak vinnes f. ö. därvid: det blir inte nödvändigt att giva stamlösningen av syra, som användes till jämförelselösningarna, en på förhand noga bestämd koncentration. Det är däremot nödvändigt, att stamlösningarnas relativa koncentrationer äro noga kända, vilket i de talrika fall, då en av dem kan beredas genom invägning, kan realiseras utan svårighet. Enär karbonatfri NaOH eller KOH, som rekommenderas för beredningen av åtskilliga vanliga buffertsystem, är relativt besvärlig att framställa, förvara och uppmäta, ha här förslagsvis sammanställts tre serier jämförelselösningar, som tillsammans täcka området från pH = 3,5 till pH = 9,2 och som kunna beredas av lätt tillgängliga stamlösningar.

a. *Acetatbuffert: pH = 3,5 — 6,0. Indikator: metylorange.*

»*Syra*»: ren koncentrerad ättiksyra spädes, så att lösningen blir ungefär 1-molar (60 gram CH_3COOH per liter), halten bestämmes genom titrering. Det för spädningen använda destillerade vattnet bör ha befriats från kolsyra genom kokning.

»*Salt*»: Av kristalliserat natriumacetat, CH_3COONa, $3H_2O$, beredes en lösning av samma molaritet som ovanstående syra. Om denna är *m*-molar skall alltså 136 *m* gram acetat uppvägas och lösas till 1 liters volym. En lämplig serie erhålles, om man tager 1, 2, 3, o. s. v. cm^3 av syran till 9, 8, 7, o. s. v. cm^3 av saltet i 9 provrör samt tillsätter indikator lika många droppar i varje rör. Vid behov kunna sedan »mellanfärger» inskjutas i serien.

Beräkning av pH sker enligt ekv. (4 B):

$$pH = 4{,}75 + \log \frac{cm^3 \text{ acetat}}{cm^3 \text{ syra}}.$$

b. *Fosfatbuffert: pH = 5,5 — 8,0. Indikator: bromtymolblått.*

»*Syra*»: primärt fosfat (en passande lösning erhålles, om 9,08 gr KH_2PO_4 löses till 1 liter).

»*Salt*»: sekundärt fosfat (11,88 gr Na_2HPO_4, $2H_2O$, s. k. Sørensens fosfat, löses till 1 liter)

$$pH = 6{,}81 + \log \frac{cm^3 \text{ sekundärt fosfat}}{cm^3 \text{ primärt fosfat}}.$$

Värdet för pK är här fosforsyrans sekundära dissociationskonstant; angående dess numeriska värde se Clark sid. 210.

c. *Boratbuffert: pH = 7,6 — 9,2. Indikator: fenolrött eller tymolblått.*

»*Syra*»: borsyra (0,1-molar lösning fås, om 6,18 gram H_3BO_3, kristalliserad borsyra, löses till 1 liter).

»*Salt*»: borax (0,05-molar lösning fås, om 19,11 gram $Na_2B_4O_7$, $10H_2O$ löses till 1 liter).

Emedan borax är ett anhydrosurt salt (motsvarande blott 50 % neutralisation av syran), sker beräkningen efter en modifierad formel för de föreslagna lösningarna:

$$pH = 9{,}21 + \log \frac{\frac{1}{2}\,(cm^3 \text{ borax})}{\frac{1}{2}\,(cm^3 \text{ borax}) + cm^3 \text{ borsyra}}.$$

Borsyra förhåller sig som en mycket svag enbasisk syra $H^{\cdot}H_2BO_3'$.

I anslutning till föregående utredning vill jag skissera ett par *uppgifter för enskilt arbete* i kemi på realgymnasiet.

A. *Bestämning av en syras ekvivalentvikt genom titrering.* Ekvivalentvikten, *e,* är den vikt i gram, vilken vid den reaktion, som betraktas, kemiskt motsvarar 1 gram väte — för en enbasisk syra vid neutralisation alltså lika med molekylvikten.

För denna uppgift lämpa sig syror, som förekomma i kristalliserad form, ej äro alltför svårlösliga och ej heller

alltför svaga ($K > 10^{-6}$) (benzoesyra, salicylsyra, vinsyra). Av syran uppväges noggrant en mindre mängd — antag g gram — som löses i vatten. Indikator tillsättes (för de nämnda syrorna fenolftalein), och en stark bas med känd normalitet n tillföres ur byrett, tills lösningens färg just slår om till svag rosa. Om v cm^3 därvid åtgått, erhålles ekvivalentvikten e ur sambandet

$$\frac{g}{e} = \frac{nv}{1000}. \qquad (15)$$

För två- eller fler-basiska syror finnas givetvis två eller flera ekvivalentvikter, alltefter som en eller flera $H^{\cdot}$-joner neutraliseras. Angående teorien för sådana titreringar se Bjerrum, Ramberg eller Kolthoff. Anm.: vinsyra titreras som tvåbasisk med fenolftalein, ekvivalentvikten är lika med halva molekylvikten.

Den för syrans titrering behövliga basen framställes genom upplösning av NaOH eller KOH i vatten (vid användandet av de preparat, som nu föras i handeln i flingor, pärlor och tabletter fås därvid, om det använda vattnet ej innehåller kolsyra, i allmänhet en lösning med endast obetydlig karbonathalt). Basens normalitet kan bestämmas genom titrering med en stark syra, som i sin tur inställts på borax, vilken alltså i detta fall är »urtitersubstans». Den sistnämnda titreringen sker enligt reaktionen

$$2Na^{\cdot} + B_4O_7'' + 2H^{\cdot} + 2Cl' + 5H_2O = 4H_3BO_3 + 2Na^{\cdot} + 2Cl'.$$

Varje mol borax motsvarar alltså 2 mol HCl; boraxens ekvivalentvikt vid denna reaktion är alltså $\frac{1}{2}(Na_2B_4O_7, 10H_2O)$. Om g gram uppvägts, och v cm^3 syra åtgått för uppnående av ekvivalenspunkten, beräknas syrans normalitet enl. ekv. (15)

$$n = \frac{1000\,g}{191\,v}.$$

Den färdigtitrerade lösningen innehåller borsyra och koksalt; med kännedom om syrans koncentration (omkring 10^{-2} mol/liter) och konstant ($10^{-9,2}$) finner man enl. ekv. (5), att metylrött är den lämpligaste indikatorn. Om det vid mätningen använda vattnet är kolsyrefritt, får man skarpa färgomslag och goda värden.

B. *Bestämning av en syras dissociationskonstant.* Denna uppgift kan lösas experimentellt med användning av ekv. (1), som för en tillräckligt svag syra antager formen

$$[H^{\cdot}] = \sqrt{K\,c}.$$

Man behöver tydligen bestämma sammanhörande värden av totalkoncentration c och vätejonkoncentration [H˙]. Bestämningen av c kan ske antingen så, att en uppvägd mängd syra löses i en viss mängd vatten eller genom titrering med bas enl. ovan angiven metod. Bestämningen av [H˙] i lösningen sker med någon av de förut omtalade metoderna. För försök med t. ex. benzoesyra ($pK = 4{,}2$) eller smörsyra ($pK = 4{,}8$) passa acetatbuffertar som jämförelselösningar, för svagare syror däremot fosfatbuffertar. Syralösningens pH-värde kan i viss mån varieras genom lämpligt val av koncentration c. Bestämning av dissociationskonstanten för en svag bas liksom av hydrolys hos salter av svaga syror kan också ske genom mätning av [H˙] i lösningen. I dessa fall lämpa sig boratbuffertar som jämförelselösningar.

C. *Upptagandet av en neutralisationskurva* är en tacksam, ehuru relativt omfattande uppgift. Man behöver därvid jämförelselösningar och indikatorer, som tillåta bestämning av pH-värden från 2—3 upp till 9—10. Då pH-bestämningarna utföras kolorimetriskt är följande tillvägagångssätt, som f. ö. också bäst ansluter sig till de vid härledningen av kurvans ekvation gjorda förutsättningarna, att rekommendera. Av syran beredes exempelvis 1 liter 0,02-molar lösning. Till bestämning av en punkt på kurvan tages härav 50 cm^3, vartill sättes den för varje punkt önskade mängden bas (alltså 0, 1, 2, 3 o. s. v. cm^3 av 0,1-normal

NaOH; 10 cm^3 motsvara uppnåendet av ekvivalenspunkten) samt vatten, så att volymen blir 100 cm^3. Syrans totalkoncentration i varje prov är då 0,01-molar. De erhållna pH-värdena inprickas i ett diagram såsom ordinator till motsvarande antal cm^3 bas som abskissor. Lämpliga syror med olika typer av neutralisationskurvor äro bensoesyra, oxalsyra och vinsyra.

Litteraturhänvisningar.

Grunderna av dissociationsteorien och dess tillämpningar behandlas i

G. Böös och J. Lundberg. Lärobok i kemi för gymnasiet (s. 104—113) 2:a uppl. Norstedt, Stockholm, 1934, kr. 6.

L. Ramberg. Grunddragen av den kemiska analysens teori (Kap. 6, 9—11, 16) 2:a uppl. Gleerup, Lund, 1921, kr. 7,75.

N. Bjerrum. Die Theorie der alkalimetrischen und azidimetrischen Titrierungen. Enke, Stuttgart, 1914.

Närmare uppgifter om egenskaperna hos indikatorer och om utförandet av titreringar finner man i

J. M. Kolthoff. Säure- und Basen-Indikatoren. Springer, Berlin, 1932, Mk 19,80.

—. Die Massanalyse I, II. Springer, Berlin, 1930, 1931, Mk 15 + 29,40.

Den f. n. mest uttömmande monografien över pH-bestämningens teori och metodik torde vara

W. M. Clark. Determination of hydrogen ions. Williams and Wilkins, Baltimore 1929, Doll. 6,50.

Neutralisationskurvor diskuteras i två tidskriftsuppsatser:

B. Englund. Z. anorg. Ch. *158*. 359 (1926) och Rec. Trav. chim. Pays-Bas *51*. 135 (1932).

Bestämning av vattnets ångtryck.

Den nedan beskrivna apparaten för bestämning av vattnets ångtryck är så enkel, att den utan vidare kan sammansättas av delar, som förekomma vid varje laboratorium. Den kan alltså lätt erhållas i flere ex., vilket har sin betydelse, då försöket närmast är tänkt som elevlaboration.

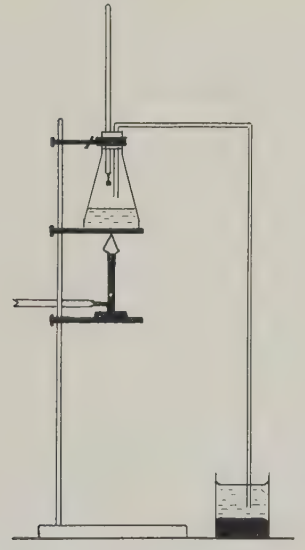


Fig. 1.

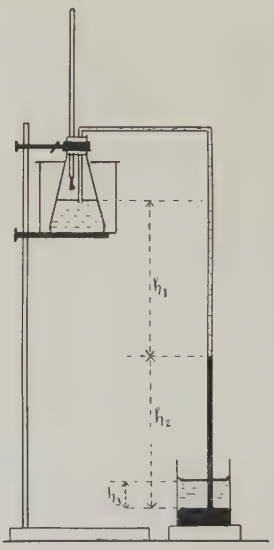


Fig. 2.

Apparaten (fig. 1) består av en tjockväggig Erlenmeyerkolv (500 cm³), försedd med en kautschukpropp, i vilken äro inpassade en termometer och ett dubbelt omböjt glasrör, vars mindre skänkel slutar mitt i kolven. Den yttre rördelens längd är ca 800 mm. Nedre mynningen av denna del befinner sig i en bägare med ett några cm högt kvicksilverlager på botten och däröver ett lager vatten till rörets mynning.

I kolven fylles vatten, så att detta når något över den inre mynningen av glasröret; kolven fastsättes i stativ enl. fig. Det långa yttre röret bör också lämpligen stödjas genom att fastklämmas i ett stativ. Vattnet i kolven upphettas till kokning, varvid ju en del vatten strömmar över till bägaren, så att glasrörets yttre mynning kommer att befinna sig under vattenytan. Kokningen, som bör vara häftig, fortsättes till dess man kan antaga, att all luft utdrivits ur kolven. Genom att iakttaga ångbubblornas utseende kan man ju tämligen väl kontrollera detta.

Sedan luften utdrivits, avlägsnas brännaren, och en stor bägare (1 000 cm³), lämpligen försedd med en smula bomull på botten, skjutes nedifrån kring kolven (fig. 2). Denna får nu svalna något, varvid vattnet tryckes tillbaka från bägaren till kolven. Den därpå följande operationen fordrar en smula påpasslighet: då vattnet stigit något över det inre rörets mynning i kolven, upplyftes bägaren med kvicksilvret, så att glasrörets yttre mynning kommer ned i kvicksilvret. En träklots skjutes under bägaren, så att detta läge bibehålles. Härvid måste rörmynningen hela tiden befinna sig under vätskeytan; man måste tillse, att tillräckligt vatten härtill finnes i bägaren. Kolven omges med bomull för att avsvalningshastigheten skall minskas. Mellan vattenångan i kolven och den yttre luften ha vi nu en vattenpelare h_1, kvicksilverpelaren h_2 och vattenpelaren h_3. De båda förstnämnda bestämmas exempelvis för varje grad; h_3 är ju konstant.

Betecknas barometerståndet med b mm Hg och vattnets ångtryck med p mm Hg är

$$b + \frac{h_3}{13{,}6} = p + \frac{h_1}{13{,}6} + h_2.$$

Varje laborationsgrupp består lämpligen av 3 (ev. 2) laboranter, av vilka en observerar termometern och ger tecken, då kvicksilverpelaren i termometern passerar gradstrecken, den andre avläser i dessa ögonblick h_1 och h_2 och den tredje för protokollet.

Sedan försöket avslutats, bör man, om man vill undvika att kvicksilver stiger upp i kolven, koka upp vattnet och därigenom driva ut kvicksilvret ur röret, innan man lyfter upp detta ur bägaren med Hg. Skall man taga isär apparaten, spelar det ju ingen roll, om kvicksilver kommer in i kolven, men detta bör förebyggas, om man har för avsikt att förvara apparaten till kommande försök. Detta är att rekommendera, enär apparaten så småningom blir tätare; kautschuken brukar ju nämligen »växa ihop» med glaset.

Den använda termometern måste vara tillräckligt »snabb» för

att korrekt ange ångans temperatur. I annat fall anges en temperatur, som är högre än ångans och de erhållna värdena bli för låga. Kolvens temperatur får därför ej heller sjunka för hastigt.

Hj. Mandal.

*

Ovanstående metod har även prövats vid Luleå h. a. l. under jämförelse med Grimsehls apparat (G. I, 7. Aufl. p. 475). Mandals anordning synes vara att principiellt föredraga, emedan termometern befinner sig mycket nära den vätskeyta, på vilken ångan trycker, medan däremot i Grimsehls och likartade apparater termometerns kula är skild från vätskeytan i manometern genom ett mer eller mindre långt rör, i vilket destillation i viss utsträckning försiggår. Praktiskt framträda förtjänsterna särskilt om man upptager ångtryckskurvan både vid stigande och fallande temperatur. T. o. m. om bomullsskyddet utelämnas och en ganska klumpig termometer användes, sammanfalla de båda kurvorna nästan fullständigt. Grimsehls vertikalmåttstock gör god tjänst även vid Mandals apparat. Särskilt vid stigande temperatur, då kvicksilverpelaren alltid är litet orolig, kan det vara bättre att i förväg inställa vertikalmåttstockens visare på ett jämnt delstreck och verkställa temperaturavläsning i det ögonblick kvicksilverytan passerar visaren.

R. Lundblad.

Rymdgeometriens plats inom realgymnasiets kursplan.

I nu gällande kursplaner, liksom i äldre, är rymdgeometrien å realgymnasiet förlagd till högsta ringen. Undersöker man detta kursmoment närmare, finner man, att det låter på ett naturligt sätt uppdela sig i två huvuddelar: 1:o en inledande översikt av de grundläggande satserna om räta linjer, plan och polyedrar, 2:o beräkningar av volymer av polyedrar och rotationskroppar. Huruvida definitioner och annat (med undantag av volymberäkningar) rörande rotationskroppar skola hänföras till det ena eller det andra momentet, synes vara av föga vikt.

Enligt undertecknads mening böra dessa båda delar av rymdgeometrien behandlas i helt olika sammanhang. Den inledande översikten bör behandlas omedelbart efter och i nära anslutning till den plana geometrien och planimetrien och före trigonometriens påbörjande. Volymberäkningarna åter böra genomgås efter

differentialkalkylens inhämtande, då det mesta härav kan genomgås som en tillämpning av integralbegreppet.

Under läsåret 1932—1933 undervisade undertecknad en andra realring av fyraårigt gymnasium i matematik. Med denna avdelning, som alltså innevarande år förts fram till studentexamen, har den ovan skisserade kursfördelningen genomförts. Det är om de därvid vunna erfarenheterna jag vill nämna något.

Vid det tillfälle ämneskonferensen i matematik behandlade förslaget att genomgå den inledande kursen i rymdgeometri i R II[4], framhävde undertecknad särskilt följande punkter såsom motivering:

1. Den inledande kursen i rymdgeometri är i matematiskt hänseende relativt lätt, kan därför utan svårighet genomgås på ett tämligen tidigt stadium.
2. Den lämpar sig synnerligen väl att genomgås omedelbart efter det den plana geometriens behandling avslutats, då både dess innehåll och bevismetoder stå i intimt samband med den plana geometriens.
3. Dess genomgång måste underlätta förståelsen av vissa partier i trigonometrien, t. ex. problem rörande punkters läge på jordytan, höjdmätning i olika vertikalplan, etc.
4. Man erhåller härigenom redan på ett tidigt stadium ett nytt område med enkla och naturliga tillämpningar av planimetri och trigonometri.
5. Man får det rymdgeometriska studiet fördelat på längre tid, vilket måste vara av betydelse för rumsåskådningens utvecklande. Att träna eleverna i åskådlig rumsuppfattning är ju den inledande rymdgeometriens främsta uppgift, men denna erbjuder alltid vissa svårigheter, som måste göra sig särskilt gällande, om detta kursmoment skall genomgås på kort tid.
6. Undervisningen i teckning och geometri böra stödja varandra. För teckningsundervisningen är det en fördel med den nämnda förskjutningen, då man redan i de första realringarna i linearritningen behandlar rymdgeometriska förhållanden, kroppars plana utbredningar och plana sektioner. Denna fördel för teckningsundervisningen återverkar sedan i sin tur fördelaktigt på matematikundervisningen.

Verkningarna av den företagna omplaceringen beträffande den nämnda avdelningen kunna nu fullständigt överblickas. Det ovan anförda har helt och fullt bekräftats.

Det mötte inga som helst svårigheter att behandla den inledande kursen i rymdgeometri på tidigare stadium. Då detta kursmoment nu kom i sitt naturliga sammanhang, erbjöds talrika

tillfällen till anknytning och repetition av den förut genomgångna kursen i plan geometri och planimetri. Därför hade undertecknad heller aldrig känslan av att lägga ned för mycket av den dyrbara tiden på detta område, vilket man lätt får i högsta ringen, om man där skall genomgå dessa enkla satser. Åtminstone har undertecknad många gånger känt en tendens att behandla detta parti av rymdgeometrien väl summariskt, då det förlagts till högsta ringen.

Betydelsen av den företagna omplaceringen var också påfallande i fortsättningen.

Vid de planimetriska tillämpningarna av trigonometrien erhölls nu ett omväxlande material från rymdgeomtrien, både rörande rätvinkliga och snedvinkliga trianglar. Härigenom kunde man — och det utan att någon tid gick förlorad — mycket fylligare genomgå dessa betydelsefulla tillämpningar än vid den vanliga kursfördelningen, då man i högsta ringen ej kan ha tid att alltför grundligt syssla med dessa, på detta stadium ofta väl lätta problem. De äro emellertid av synnerlig vikt för utvecklandet av rumsåskådningen.

Undertecknad har därför ett bestämt intryck av att den nämnda anordningen medfört en tidsbesparing. Och varje tidsbesparing inom matematiken torde vara välkommen, sedan 1933 års stadga knappat in på matematikens timantal.

På grund av de gynnsamma erfarenheterna kommer undertecknad att även i fortsättningen föreslå ämneskonferensen, att ovannämnda uppdelning av rymdgeometrien får tillämpas.

Den nya undervisningsplanen medför givetvis, att det torde bli svårt, kanske omöjligt att hinna med den inledande kursen i rymdgeometri i R II[A]. Men ifrågavarande kursmoments plats mellan den plana geometriens avslutande och trigonometriens påbörjande torde likväl kunna fasthållas.

Förmodligen har den av mig här förordade anordningen redan tillämpats också av andra. Såväl de äldre som de nya metodiska anvisningarna hänvisa till att vissa delar av rymdgeomtrien kunna utbrytas och tagas tidigare. Det vore av intresse att få höra något om andras erfarenheter och särskilt huruvida några nackdelar av denna anordning i något avseende kunnat iakttagas.

C. E. Sjöstedt.

En enkel trefasgenerator och några försök med växelström.

Av C. RENDAHL.

Vid utredandet av växelströmmars grundegenskaper lämnar nedan beskrivna generator god hjälp. På den bladade järnkärnan till en dammsugares rotor lindas tre härvor av ledningstråd (0,5 mm, dubbelt bomullslindad), förskjutna 120° i förhållande till varandra. Varje härva upptar fyra av kärnans tolv spår (fig. I). Det lindade ankaret får rotera mellan två polskor av gjutjärn, som jämte rotorn skruvas fast vid en träplatta (se fig. I). Varje härvas

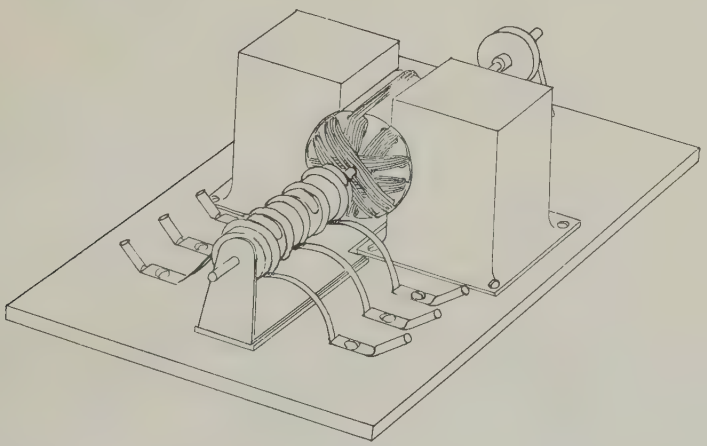


Fig. I.

ändpunkter förbindas med två släpkontakter. Plattan lägges med polskorna mot polerna till en kraftig elektromagnet, vars magnetlindning matas med likström. Man kan även använda dammsugaremotorns fältmagneter, eventuellt omlindade med grövre tråd. Men man får på detta vis ej så starkt fält som med en separat, starkare elektromagnet. Rotorn drives med en vevmaskin eller liten motor. Apparatens utförande är lämpligt som enskilt arbete. Den som så önskar kan från maskinist Berggren, Norra reallläroverket i Stockholm, erhålla den i fig. I avbildade apparaten för 25 kr. Vid beställning bör avståndet emellan elektromagnetens järnkärnor angivas.

Vid försök med enkel växelström kan man arbeta antingen i en fas, då ledningarna anslutas till ett av de tre paren släpkontakter, eller stjärnkoppla kontakterna (se fig. 20); ström tages då ut mellan två faser, varvid högre spänning erhålles. I senare fallet kan man (vid 40 varv per sek.) lätt få 40 V vid 0,3 A. I förra fallet kan man uppnå 2,5 A i ett anslutet motstånd om 3 Ω.

I det följande beskrivas några enkla växelströmsförsök i huvudsak till sin idé hämtade från Roller-Pricks »Schulversuche zur Elektrizitätslehre II, Wechselstrom».

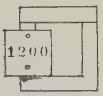
Beteckningar i figurerna:

Glimlampa ⊗

Glödlampa (3,5 V) ⊗

Cykellampa (4 V) ✳

Ficklampsbatteri



U-formig, bladad transformator, järnkärna med ok och spole med 1200 trådvarv.

Man behöver: 3 spolar med 300 varv (1 mm tråd; motstånd ung. 1 ohm), 3 spolar med 600 varv (0,8 mm tråd; 3,5 ohm), 2 spolar med 1 200 varv (0,6 mm tråd; 12 ohm) och 2 spolar med 12 000 varv (0,2 mm tråd; 1 200 ohm). Vidare erfordras två transformatorskärnor med två ben och ok samt två trebenta tranformatorskärnor med ok. För att enkelt påvisa strömstyrka och spänning är lämpligt att på träplattor montera (fig. II) fyra seriekopplade små lampor för 3,5 volt (3 ex.) och för 4 volt (1 ex.) samt fyra parallellkopplade 3,5-voltslampor (3 ex.). Dessa lampor om 4 V och 3,5 V lysa klart vid resp. 0,3 och 0,2 amp. De förra användas i »voltmetern», emedan de tåla överbelastning; för övrigt äro de senare att föredraga på grund av mindre energiförbrukning. Bladade transformatorskärnor och spolar säljas hos P. A. Norstedt & Söner samt R. Grave, Stockholm.

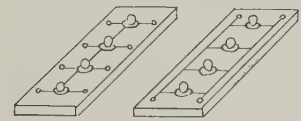


Fig. II.

A. Försök med självinduktion.

1. *Grundförsök I* (fig. 1). Glimlampan G tändes vid strömmens slutande, då i första ögonblicket ingen ström kan passera spolarna S, om oket är pålagt. Lampan slocknar strax, sedan fältet i S byggts upp och endast det ohmska motståndet återstår i denna del av ledningen. Vid strömmens brytande tändes lampan G ånyo

för ett ögonblick, då fältet i S vid sitt sönderfallande ger upphov till en strömstöt åt motsatt håll (genom lampan). Vid R måste ett motstånd (150 Ω) vara inkopplat; se WETTERBLAD, denna tidskr. årg. *17*, s. 239.

2. *Grundförsök II* (fig. 2). Då strömmen från batteriet B slutes, tändas lamporna vid A (enligt 1). Medan fältet i S bygges upp, slockna lamporna vid A »krypande» och lysa knappast alls, då fältet i S är fullt utbildat. (Motst. i en lampa är 20 Ω, i en 1 200-spole 12 Ω; R = 20 à 30 Ω). Om man vid öppnandet av strömmen påskyndar sönderfallandet av fältet vid S genom att bryta upp oket, tändas lamporna vid A ånyo. Att strömmen i detta fall går åt motsatt håll genom spolarna kan visas med ett inkopplat vertikalgalvanoskop.

Fig. 1.

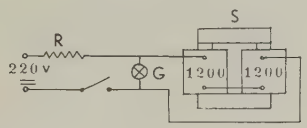


Fig. 3.

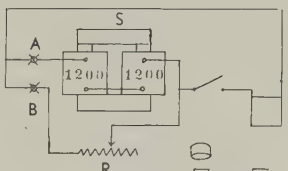


Fig. 2.

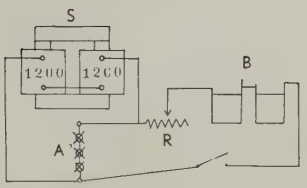
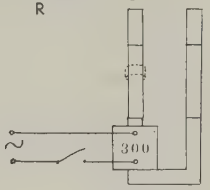


Fig. 4.



3. *Fasförskjutning genom självinduktion* (fig. 3). Lampan i A tänder sig 1 à 2 sek. senare än lampan i B, då uppbyggandet av fältet i S hindrar strömmen att få full styrka med detsamma. Vid strömmens brytande erhålles ingen dylik effekt, emedan A och B då befinna sig i samma strömkrets. Brytes oket upp, tändas lamporna ånyo (enl. 2); R = 15 à 20 Ω.

4. *Thomsons försök* (fig. 4). Sedan generatorns rotor fått stor hastighet, påsläppes plötsligt stark ström i elektromagneten. En 2 cm bred aluminiumring, som lagts kring 300-spolens järnkärna förlängd genom ok, hoppar då upp ända till 50 cm. (Ringen erhålles genom avsågning av ett aluminiumrör.) Om man vevar med jämn hastighet, kan man få ringen att sväva på större eller mindre höjd kring järnkärnan. Resultatet förklaras av fasförskjutningen hos strömmen i aluminiumringen.

5. *Drosselspolen* (fig. 5). Cykellamporna vid A utgöra ett slags voltmeter, lamporna vid B (1—4 st.) ett slags ampèremeter. Om strömmens frekvens är tillräckligt stor, blir självinduktionen till-

räcklig, för att lamporna vid B skola slockna, om oket är pålagt. De alltjämt brinnande lamporna vid A visa, att spänning hela tiden är pålagd. Variera okets läge och spolens varvantal och iakttag resultatet.

B. Försök med kapacitet i kretsen.

6. *Laddning och urladdning av kondensator med knivströmbrytare* (fig. 6). Glimlampan G lyser till vid laddning av kondensatorn i läget I och vid urladdning i läget II. Observera att strömriktningen är olika i de bägge fallen. Strömmen skall brytas och slutas snabbt. Kapacitet vid C = 2—6 μF.

Om kapaciteten ökas till 18—30 μF, kan man ersätta glimlampan med en vanlig 220 volts glödlampa. Ett vackert gnistregn erhålles, om en laddad kondensator får urladda sig mellan ett par metallspetsar.

Fig. 5.

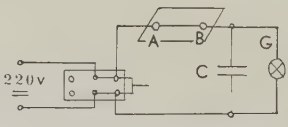


Fig. 7.

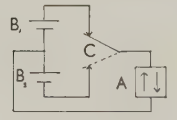
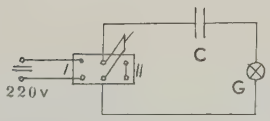


Fig. 8.

Fig. 6.



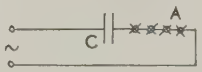


Fig. 9.

7. *Laddning och urladdning av kondensator. »Blinkljus.» Grafitmotstånd* (fig. 7). Om ett motstånd av lämplig storlek inkopplas mellan A och B, uppladdas kondensatorn C (2—6 μF) långsamt, tills spänningen blir tillräcklig för en urladdning genom glimlampan G. Efter urladdningen börjar uppladdningen på nytt, och G kommer alltså att blinka till med jämna mellanrum. Dessas längd beror på storleken av motståndet AB. Är detta för litet, blinkar G för hastigt eller brinner kontinuerligt. Som motstånd kunna användas silitmotstånd på 10^5 till 10^6 ohm. Bättre är att använda ett motstånd enligt figuren. På en liten skiva av matt glas uppritas med blyerts två ytor A och B, mot vilka kontakter klämmas fast. Mellan dessa ytor drages ett blyertsstreck omkring 5 cm långt. Motståndet minskas genom att förgrova blyertsstrecket och ökas genom att med radergummi försvaga strecket.

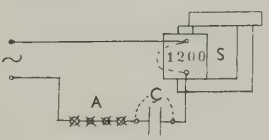
8. *Konstgjord växelström* (fig. 8). Två ficklampsbatterier B_1 och B_2 seriekopplas med en klämmare, som även förbindes med ena ledningstråden till en förbrukningsapparat A (en cykellampa, ett vertikalgalvanoskop, en transformatorsspole, en kondensator). Den andra ledningstråden från A är medelst en tvåpolig strömbrytare C förenad med B_1 och B_2. Genom att hastigt föra brytarens rörliga del fram och tillbaka får man ström av växlande riktning genom A. För att erhålla stor frekvens lägger man enklast det ena batteriet på det andra (seriekopplade enligt fig.) och för helt enkelt den fria ledningstråden hastigt fram och åter mellan batteriernas fria polbleck.

9. *Kapacitiva motståndet avtager, då frekvensen ökas* (fig. 9). Kapaciteten bör vara 6—24 μF. Vid långsam vevning lysa ej glödlamporna vid A (1—4 st.). Ökas frekvensen hos den av generatorn alstrade växelströmmen, tända sig lamporna vid lämplig frekvens, vilket visar, att kapacitiva motståndet hos C har minskats.

C. Självinduktion och kapacitet i samma strömkrets.

10. *Kapacitet upphäver självinduktion* (fig. 10). Först inkopplas ensamt kapaciteten C (6 μF) och rotorns hastighet ökas, tills lam-

Fig. 10.



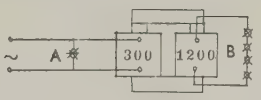
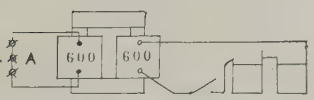


Fig. 12.

Fig. 11.



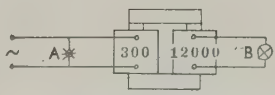


Fig. 13.

porna vid A lysa. Sedan kortslutes C och 1 200-spolen S inkopplas i växelströmskretsen. Genom okets förskjutning ökas självinduktionen, tills lamporna slockna vid samma frekvens som förut. Om nu även C inkopplas, tändas lamporna på nytt. Ökas kapaciteten, måste självinduktionen minskas, för att lamporna skola lysa med samma styrka som förut.

Resultat erhållas lättare, om generatorspänningen först upptransformeras enligt försök 12.

D. Transformatorn och dess användning.

11. *Grundförsök* (fig. 11). Då strömmen slutes och brytes, tändas lamporna vid A. Om endast *ett* ficklampsbatteri och *en* lampa vid

A användes, tändes denna lampa som förut vid strömmens slutande och brytande. Men om oket hastigt bändes upp omedelbart efter strömmens brytande, blinkar lamporna ånyo till (enligt 2).

12. *Upptransformering av spänningen* (appr. 4 ggr.) (fig. 12). Cykellampan vid A är kopplad som voltmeter och ger ett mått på spänningen mellan 300-rullens polskruvar. Lamporna vid B (3,5 volt) ge ett mått på spänningen mellan 1200-rullens polskruvar. De senare lamporna lysa något svagare än lampan vid A.

Vid A valdes en cykellampa, emedan en 3,5 volts lätt brinner sönder vid oförsiktig vevning. Tag sedan bort B-lamporna och pröva spänningen vid 1 200-spolens polskruvar med fingrarne. Ofarliga stötar.

13. *Högspänning* (fig. 13). Då voltmetern vid A (4 voltslampa) lyser, tändes även glimlampan vid B (tändningsspänning omkr. 160 volt). Spänningen vid B är alltså 40 gånger större än den

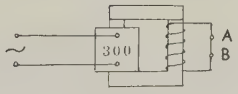


Fig. 14.

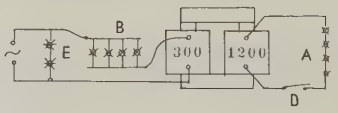
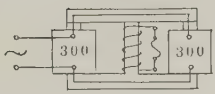


Fig. 15.



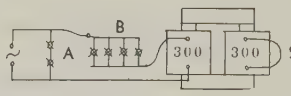


Fig. 16.

anslutna spänningen. På högspänningssidan kan man införa t. ex. 3 vanliga 220 volts lampor i serie eller ett grafitmotstånd (enl. 7) utan att glimlampan slutar att lysa. Denna har nämligen ett mycket stort motstånd (omkring 20 000 ohm).

14. *Stor strömstyrka; smältning* (fig. 14). I sekundärkretsen användes en spole med 25 varv 2 mm koppartråd. Mellan A och B fastklämmes en 3—6 cm lång järntråd med 0,5 mm diam. Om strömstyrkan i generatorns magnetlindning ej är för svag och frekvensen är tämligen stor, börjar järntråden glöda och brinner snart utav. Härför kräves en strömstyrka av omkring 6 ampère.

Man kan också på en trebent kärna koppla två 300-spolar parallellt. Deras fält samverka då i mittspolen.

En 10 cm lång järntråd (0,5 mm) smälter då hastigt och bildar glödande kulor.

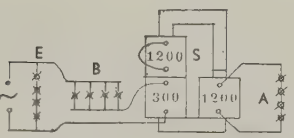
15 a. *Transformering av strömstyrka och spänning* (fig. 15). Lamporna vid A och B lysa i det närmaste lika klart; således har strömstyrkan vid transformeringen *minskats* (ungef. i förh. 1 : 4) under det att spänningen *ökats* (till $4 \cdot 3{,}5 = 14$ V från uppskattningsvis $2 \cdot 4 - 3{,}5 = 4{,}5$ V). Genom att byta spolar och lampgrup-

per visas (och skattas på liknande sätt) ned- resp. upptransformering av spänning och strömstyrka. Transformeringsförhållande äro ju rätt komplicerade, varför man bör avstå från närmare kvantitiv behandling. Möjligen kan man framhålla, att spänningarna förhålla sig som spolarnas varvtal vid *liten strömstyrka* (tomgång) och strömstyrkorna omvänt som varvtalen vid *litet motstånd* (kortslutning).

Spolarnas varvantal och lampornas antal bör även varieras.

15 b. *Transformatorns självreglering vid tomgång* (fig. 15). Strömmen i sekundärkretsen avbrytes vid D. Lamporna vid A slockna då. Men samtidigt slockna även lamporna vid B, d. v. s. »ampèremetern» visar, att föga energi förbrukas i transformatorn. »Voltmetern», d. v. s. de två cykellamporna vid E, brinner hela tiden klart. Transformatorns primärspole är alltså ansluten till samma spänning som förut, även då lamporna vid A och B äro släckta, s. k. tomgång.

Fig. 17.



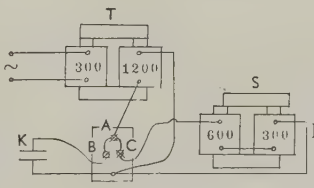


Fig. 19.

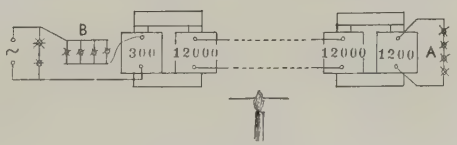


Fig. 18.

I samma ögonblick strömbrytaren D öppnas och föga energi förbrukas, blir vevningen mycket lätt. Är man ej då försiktig, blir frekvensen för hög och lamporna vid E brinna sönder. Man kan för säkerhets skull vid E seriekoppla fem cykellampor.

16. *Kortsluten sekundärspole i transformatorn* (fig. 16). Om sekundärspolen S kortslutes, brinna lamporna vid B för två 3,5-voltslampor i A. Ökas antalet lampor i A till fyra, måste man veva sakta. Annars brinna lamporna vid B sönder. Härav inses, att transformatorn förbrukar mycket energi, då sekundärrullen är kortsluten. Vevningen är nu tung. Om sekundärkretsen brytes (försiktig vevning), slockna lamporna i B (enligt 15 b).

17. *»Skärmverkan» av kortsluten transformatorsspole* (fig. 17). Man använder två järnkärnor, den ena ställd på den andra. Om

1 200-spolen vid S är öppen, brinna lamporna både vid A och B. Då S kortslutes, slockna lamporna vid A åtminstone i det närmaste. Vill man använda hög frekvens, böra lamporna vid B borttagas och cykellampor användas vid E.

18. *Långtransport av elektrisk energi* (fig. 18). Sekundärspolen på mottagningsstationen kan utbytas mot en 300- eller 600-spole, då antalet lampor vid A ändras till 1 eller 2 respektive. I långledningen mellan de båda transformatorerna kunna 3 à 4 220 volts glödlampor införas i serie, utan att energitransporten hindras. Man kan även avbryta en av ledningsbanorna, så att ett luftgap på 5 mm bildas. Energitransporten pågår som vanligt, om lågan från en spritlampa eller gasbrännare får vid avbrottsstället upphetta luften, som härigenom joniseras.

Fig. 20.

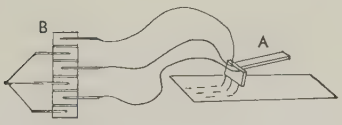
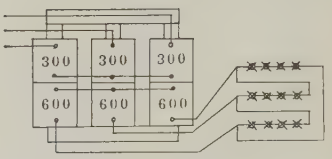


Fig. 22.



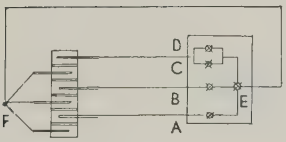


Fig. 21.

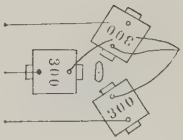


Fig. 23.

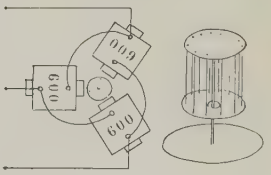


Fig. 24.

19. *Thomsons svängningskrets* (fig 19). För att öka polspänningen användes transformatorn T. I strömkretsen från 1200-spolen är självinduktionen S parallellkopplad med kapaciteten K (6—24 μF). Vid stor självinduktion och tillräcklig frekvens brinna endast lamporna A och B. Vid liten självinduktion och försiktig vevning lysa endast lamporna A och C. Självinduktionen regleras genom flyttning av oket. Vid visst läge av detta kan man vid lagom frekvens uppnå, att båda lamporna B och C brinna, under det att lampan A är mörk. Man har då stämt svängningskretsen till resonans. Om man sedan ökar kapaciteten, måste självinduktionen minskas, för att resonansen åter skall inträda. Energien pendlar då fram och tillbaka mellan S och K. Genom lampan A går endast den energi, som förbrukas av svängningskretsens ohmska motstånd.

E. Trefasströmmar.

20. *Trefasströmmarnes fasförskjutning* (fig. 20). Man indränker filtrerpapper (i ark) med en koncentrerad KNO_3-lösning, till vilken satts litet koncentr. alkohollösning av fenolftalein. Papperet vikes tredubbelt och lägges på en glasskiva. Glidapparaten A i fig. är förbunden med tre av kollektorn B:s släpringar. De tre övriga äro stjärnkopplade. Då glidapparaten med lätt hand föres över papperet, erhållas tre rader röda streck, förskjutna i förh. till varandra.

21. *Summan av trefasströmmarna = 0 vid symmetrisk belastning* (fig. 21). På en träplatta äro enligt figuren 3,5-voltslamporna A, B, C, D och E fästade. Först påsläppes av växelströmmen en fas till A. Då lysa A och E lika starkt. Sedan inkopplas en fas även till B. Nu lyser E endast svagt, men A och B med full styrka. Slutligen inkopplas även tredje fasen till C. Härvid slocknar E fullständigt, oaktat A, B och C samtidigt lysa. Ledningstråden från E till nollpunkten F kan därför i detta fall borttagas. Om ännu en lampa D är inkopplad pårallellt med C, börjar E att lysa svagt.

22. *Trefastransformatorn* (fig. 22). Vid försöket bör generatorn vara stjärnkopplad. De tre lampsystemen äro i figuren triangelkopplade för att vinna större strömstyrka. Visa, att lampgrupperna vid stjärnkoppling lysa svagare. Man kan även vända om försöket och koppla 600-spolarne i primär- och 300-spolarne i sekundärkretsen. De tre lampgrupperna i sekundärkretsen böra då vardera bestå av fyra parallellkopplade lampor. Lampgrupperna stjärnkopplas lämpligen.

23. *Modell av synkronmotorn* (fig. 23). Från den stjärnkopplade trefasgeneratorn ledas strömmarne till tre stycken stjärnkopplade 300-spolar ställda i triangel kring en kompassnål. Om ej magnetnålen av sig själv vill sätta sig i rörelse, får man ge den en stöt, »fasa» den. Ökas frekvensen, bringar det roterande fältet nålen i allt hastigare rotation.

24. *Asynkronmotorn (Kortslutningsmotorn)* (fig. 24). Trefasströmmarna föras nu till tre stycken triangelkopplade 600-spolar ställda i triangel kring en rotor (»bur»). Denna består av två bottnar av $^1/_2$ mm aluminiumplåt sammanhållna av 12—24 aluminiumstavar av 1 mm tjocklek. Bottnarnas diameter = 4 cm och stavarnas längd = 4,5 cm. Den undre bottnen är genomborrad, den övre vilar på en nålspets. Vid hastig vevning och ej för svag strömstyrka sätter sig rotorn i sakta rörelse.

Atomvikter 1935.

Element	Symbol	Atom-nummer	Atomvikt	Element	Symbol	Atom-nummer	Atomvikt
Aluminium	Al	13	26.97	Mangan	Mn	25	54.93
Antimon	Sb	51	121.76	Molybden	Mo	42	96.0
Argon	Ár	18	39.944	Natrium	Na	11	22.997
Arsenik	As	33	74.91	Neodym	Nd	60	144.27
Barium	Ba	56	137.36	Neon	Ne	10	20.183
Beryllium	Be	4	9.02	Nickel	Ni	28	58.69
Bly	Pb	82	207.22	Niob	Nb	41	92.91
Bor	B	5	10.82	Osmium	Os	76	191.5
Brom	Br	35	79.916	Palladium	Pd	46	106.7
Cer	Ce	58	140.13	Platina	Pt	78	195.23
Cäsium	Cs	55	132.91	Praseodym	Pr	59	140.92
Dysprosium	Dy	66	162.46	Radium	Ra	88	225.97
Erbium	Er	68	167.64	Radon	Rn	86	222
Europium	Eu	63	152.0	Renium	Re	75	186.31
Fluor	F	9	19.000	Rodium	Rh	45	102.91
Fosfor	P	15	31.02	Rubidium	Rb	37	85.44
Gadolinium	Gd	64	157.3	Rutenium	Ru	44	101.7
Gallium	Ga	31	69.72	Samarium	Sm	62	150.43
Germanium	Ge	32	72.60	Selen	Se	34	78.96
Guld	Au	79	197.2	Silicium	Si	14	28.06
Hafnium	Hf	72	178.6	Silver	Ag	47	107.880
Helium	He	2	4.002	Skandium	Sc	21	45.10
Holmium	Ho	67	163.5	Strontium	Sr	38	87.63
Indium	In	49	114.76	Svavel	S	16	32.06
Iridium	Ir	77	193.1	Syre	O	8	16.0000
Jod	J	53	126.92	Tallium	Tl	81	204.39
Järn	Fe	26	55.84	Tantal	Ta	73	181.4
Kadmium	Cd	48	112.41	Tellur	Te	52	127.61
Kalcium	Ca	20	40.08	Tenn	Sn	50	118.70
Kalium	K	19	39.096	Terbium	Tb	65	159.2
Kassiopejum	Cp	71	175.0	Titan	Ti	22	47.90
Kisel	Si	14	28.06	Torium	Th	90	232.12
Klor	Cl	17	35.457	Tulium	Tm	69	169.4
Kobolt	Co	27	58.94	Uran	U	92	238.14
Kol	C	6	12.00	Vanadin	V	23	50.95
Koppar	Cu	29	63.57	Vismut	Bi	83	209.00
Krom	Cr	24	52.01	Volfram	W	74	184.0
Krypton	Kr	36	83.7	Väte	H	1	1.0078
Kvicksilver	Hg	80	200.61	Xenon	X	54	131.3
Kväve	N	7	14.008	Ytterbium	Yb	70	173.04
Lantan	La	57	138.92	Yttrium	Y	39	88.92
Litium	Li	3	6.940	Zink	Zn	30	65.38
Magnesium	Mg	12	24.32	Zirkon	Zr	40	91.22

Bokanmälningar.

C. F. Lundahl, *Ekvationsteori.* Gleerups förlag, Lund, 227 sid., kr. 6:75.

Införandet av enskilt arbete i gymnasiet har aktualiserat behovet av populär litteratur, som är ägnad att fördjupa och utvidga kunskaperna utöver dem, som meddelas lektionsvis. Den svenska matematiska litteraturen av detta slag är ju ej vidare rikhaltig, och det är med tillfredsställelse, man mottager det tillskott, som lektor Lundahls ekvationsteori utgör. Den är välskriven och utförlig. Förf. har tydligen hela tiden hållit klart för sig, vilket auditorium han i första hand vänder sig till. Det är en mycket stor förtjänst, som är särskilt värd att notera.

De första 73 sidorna avse att behandla en del satser och definiera begrepp, som utgöra en nödvändig grundval för det följande. Därpå följer den ekvationsteoretiska framställningen: antal rötter till en ekvation, reella och komplexa, samband mellan rötter och koefficienter hos en ekvation av graden n, multipelrötter, gränser för en ekvations rötter, Cartesius' teckenregler, Sturms teorem, Lagrange's metod för uppsökning av approximativa lösningar m. m. Boken avslutas med exakta lösningar av ekvationer av tredje och fjärde graden. Förf. har väl disponerat sitt stoff och lämnar genom ett rikligt antal övningsexempel läsaren tillfälle att praktiskt tillämpa det inhämtade. Framställningen stödes av instruktiva figurer och tabeller.

I förordet säger förf., att han sökt göra framställningen sådan, att boken skulle kunna finna användning vid enskilt arbete även i näst högsta ringen. Denna strävan är naturlig. Emellertid synes mig det pris, som förf. måst betala därför, ganska dyrt. Förf. har måst avstå från derivatbegreppet, även där det skulle medföra avsevärda fördelar. En del bevis ha därför blivit långrandiga och oöverskådliga. Man kan ifrågasätta, om det ej skulle ha lönat sig att ge en kort framställning av de satser om derivatan, som kunde ha varit behövliga. Det hade varit tillräckligt att känna till derivatan av $(a + x)^n$ samt derivatan för en summa och för en produkt. Eller också kunde förf. helt resolut överlämnat åt

läraren att vid planläggningen av det enskilda arbetet inviga eleven i dessa element — det enskilda arbetet i matematik är ju avsett för elever, som ha lätt för ämnet. Det synes mig, som om förf. bort hysa föga betänkligheter däremot, då han dock föregriper den allmänna kursen genom att använda sig av induktion och geometriska serier (sid. 54). Särskilt må framhållas, att man genom användning av derivatbegreppet kunnat få ett enklare bevis för binomialteoremet samt framför allt att det viktiga kapitlet om multipelrötter kunnat få en avsevärt enklare och elegantare utformning. Det hade vidare varit möjligt att medtaga Newtons approximationsmetod, vilken man nu saknar. Den hade varit lämplig som enskilt arbete i högsta ringen.

En detaljgranskning av boken föranleder mig till vissa påpekanden. Å sid. 16 säges, att binomialteoremet gäller för varje positiv eller *negativ* heltals eller *bråk*exponent. Detta är oriktigt. Då exponenten är negativ eller ett bråk, blir serien oändlig och gäller endast under vissa betingelser. — Förf. påstår å sid. 32 och understryker detsamma å sid. 176, att de flesta kända irrationella tal äro rötter ur positiva och negativa rationella och ur vissa irrationella tal. Felaktigheten härav är uppenbar. De tanscendenta talen och algebraiska tal, exempelvis rötterna till en irreducibel femtegradsekvation, har förf. ej tagit med i räkningen. Likaledes har förf. å sid. 33 råkat feldefiniera en algebraisk funktion. En algebraisk funktion y definieras som bekant genom ekv. $f(x, y) = 0$, där $f(x, y)$ är ett polynom av x och y. Det förf. avser täcker blott en ringa del av denna klass funktioner. — Å sid. 56 definierar förf. udda funktioner som ett polynom av udda gradtal. Det gängse begreppet udda funktion är emellertid ett annat. Om $f(-x) = -f(x)$, så är $f(x)$ en udda funktion och om $f(-x) = f(x)$, är $f(x)$ en jämn funktion. Så är t. ex. $x^3 - 2x$ och sin x udda, men ej $x^3 - x^2$, som är varken udda eller jämn. — Enligt min mening är kontinuitetsbegreppet i kap. X ganska lösligt framställt; en klarare definition är här önskvärd. — När förf. å sid. 77 diskuterar lösningen till en andragradsekvation med bokstavskoeff. och omnämner, att man kan få den numeriska lösningen genom bokstävernas ersättning i lösningen med siffror, tillägger han, att ett dylikt förfaringssätt erbjuder ingen som helst fördel. Det är dock detta eleverna göra, då de fått någon vana att lösa dylika ekvationer. — Sats 11 å sid. 86 har fått en oriktig formulering. För satsens riktighet måste fordras, att ekvationen skall ha *rationella* koefficienter, ej enbart reella. — Satserna 20 och 21 ha fått onödigt tillkrånglade bevis. Eftersom alla koefficienterna i sats 20 äro positiva, erhålles omedelbart, att ingen positiv rot finnes, då

alla termerna bli positiva för positivt x och summan således ej kan vara noll. Sats 21 hänföres enklast till sats 20 genom transformationen $y = -x$. — Förf. säger å sid. 70, att koeff. bli mer och mer komplicerade. Det låter sig lätt bevisa, att koeff. för y^m är $f^m(k)$. — Beviset för Cartesius' första teckenregel är oklart och endast övertygande, om alla koeff. äro positiva.

Vad lösningen av tredjegradsekvationen beträffar, borde förf. framhållit den föga praktiska nyttan av lösningen, när ekvationens alla rötter äro reella och olika, det irreducibla fallet. Läsaren får måhända den uppfattningen, att inga svårigheter kvarstå efter den deducerade lösningen, och inrangerar lätt tredjegradsekvationen i samma klass som andragradsekvationen, som alltid algebraiskt ger oss aritmetiska lösningar.

De här påtalade oegentligheterna i boken må ej förrycka totalintrycket av boken som ett värdefullt tillskott till den litteratur, som står till buds för det enskilda arbetet. Boken har så många obestridliga förtjänster, att dess utgivande är mycket välkommet.

Arvid Uhler.

Åttonde skandinaviska matematikerkongressen i Stockholm 14—18 augusti 1934. Comptes rendus du Huitième Congrès des mathématiciens scandinaves tenu à Stockholm 14–18 Août 1934. Lund, Håkan Ohlssons boktryckeri 1935, XX + 398 sid.

Den åttonde skandinaviska matematikerkongressen hölls tjugofem år senare än den första och liksom denna i Stockholm. Någon avmattning i intresset kunde vid detta jubileum icke iakttagas. Antalet deltagare var dubbelt så stort som vid närmast föregående kongress, och om antalet föredrag gäller ungefär detsamma. Kongressens förhandlingar fylla också en ganska respektabel volym.

Volymens innehåll visar, att det inom de nordiska länderna alltjämt bedrives en intensiv och resultatrik forskning på det matematiska området. De flesta föredragen behandla ämnen inom den rena matematiken och ge en god uppfattning om, vilka områden och frågeställningar som äro särskilt aktuella. En framträdande plats upptaga de funktionsteoretiska undersökningarna. Matematikens tillämpningar äro av naturliga skäl mer sporadiskt företrädda. Några av föredragen höllos av utomnordiska vetenskapsmän. Man hade vid kongressen det ovanliga nöjet att höra en fransman föreläsa på svenska.

Till kongressens glansfulla förlopp bidrog att makarna Mittag-Lefflers matematiska institut firade sin högtidsdag i samband med

densamma. På Djursholms kyrkogård avtäcktes därvid en minnesvård över G. Mittag-Leffler. De tal, som vid avtäckningen höllos av professorerna C. W. Oseen och T. Carleman som representanter för resp. Vetenskapsakademien och Mittag-Lefflerska institutet finnas intagna i kongressens förhandlingar.

D. Enskog.

Elfman-Lindqvist-Carlson-Stage, *Mekanisk teknologi för tekniska läroverk.* P. A. Norstedt & Söner (Svenska bokförlaget) 1934, 404 sid., kr. 11:50.

Den nu utkomna läroboken i mekanisk teknologi har tillkommit på initiativ av K. Skolöverstyrelsen. En del litteratur i detta synnerligen vittomfattande ämne har visserligen tidigare utgivits på svenska. Dessa arbeten ha dock genom teknikens raska utveckling blivit rätt föråldrade och äro dessutom behäftade med den olägenheten att var för sig endast behandla vissa delar av ämnet, samtidigt som andra och framför allt en del moderna tillverkningsmetoder icke alls beröras.

För att åstadkomma en både samlad och fullt modern lärobok i ämnet tillkallade därför Skolöverstyrelsen särskilda sakkunniga: rektor R. Lundqvist, Norrköping, lektorerna L. Elfman, Borås och G. Lindqvist, Eskilstuna sam civilingenjörerna B. Carlson och O. Stage, Örebro. I samråd med undervisningsrådet N. Fredriksson ha dessa sakkunniga utarbetat en detaljerad plan, vars slutliga resultat är ovannämnda lärobok.

Arbetet omfattar sex huvudavdelningar:

Första avdelningen (93 sid.) har till författare lektor L. Elfman, och i denna redogöres för de viktigaste järnmalmerna och deras förekomst, framställning av tackjärn, de gängse färskningsmetoderna ävensom nyare metoder för direkt järnframställning. Vidare behandlas tackjärnets och det smidbara järnets egenskaper och användningsområden, järnets inre byggnad och stålets värmebehandling. Övriga tekniskt viktiga metaller och metallegeringar ävensom diverse smörjmedel, slipmedel, isoleringsmaterial m. m. beröras även i denna avdelning.

Andra avdelningen (76 sid.) är redigerad av lektor G. Lindqvist och omfattar gjuteritekniken och därtill hörande spörsmål.

Tredje avdelningen (73 sid.) är författad av civilingenjör B. Carlson och redogör för olika slag av valsverk och valsmetoder.

Fjärde avdelningen (53 sid.) avhandlar smidning för hand och med maskiner samt därtill hörande verktyg och värmeugnar. Författare är civilingenjör O. Stage.

Femte avdelningen (10 sid.) av lektor G. Lindqvist behandlar moderna svetsningsförfaranden och slutligen i

Sjätte avdelningen (75 sid.) redogör lektor G. Lindqvist för verktyg för metallbearbetning samt för arbetsmaskiner av olika slag såsom svarvar, hyvelmaskiner, fräs-, borr- och slipmaskiner.

Samtliga avdelningar äro synnerligen förtjänstfullt behandlade. Framställningen är klar och redig. Talrika figurer och diagram bidraga även till att göra det omfattande arbetet överskådligt och njutbart.

Martin Lien.

Georg Tauchmann, *Lärobok i elektroteknik.* Översatt och omarbetad av Folke Gunnesson och Gösta Cedergren. Siemens förlag, Stockholm 1935. 162 sid., kr. 2:50.

Denna lärobok är avsedd att användas i samband med den elektriska bygglåda, som sedan ett år tillbaka föres i marknaden av Elektriska Aktiebolaget Siemens. Grundtanken i boken är den, att kunskapen om de magnetiska och elektriska företeelserna skall inhämtas genom elevens egna experiment. En dylik tanke står helt i överensstämmelse med de metodiska anvisningarna till läroverkens undervisningsplaner, där det säges, att försöket bör vara det grundläggande vid fysikundervisningen, och att behållningen säkerligen blir störst, om eleven själv får utföra dessa. — Det är förvånansvärt, hur många ur pedagogisk synpunkt värdefulla experiment som boken ger anvisning på. Så kunna eleverna utan svårighet bygga mjukjärnsinstrument, värmetrådsinstrument samt en relativt känslig galvanometer, göra motståndsbestämning enligt bryggmetoden och spänningsmätning enligt Dubois-Reymonds kompensationsmetod. Experimenten å induktion och framförallt självinduktion äro övertygande och mycket väl funna samt komplettera på ett utmärkt sätt läroböckernas framställning.

Hela tiden arbetas med tvenne ficklampsbatterier (insatta i monteringslådans botten) som strömkälla. Härigenom bli experimenten ofarliga, om man undantager knallgasframställningen, men här varnar också boken.

Bokens framställning utmärker sig i stort sett för reda och klarhet. Endast i fråga om växelströmsläran brister det i detta hänseende på ett par punkter. Detta viktiga kursmoment hade f. ö. förtjänat en något fylligare behandling. Måhända kan detta önskemål förverkligas i samband med den utlovade radiobygglådan.

Den svenska omarbetningen är något utförligare än det tyska originalet och har försetts med enkla räkneexempel, som anknyta till de gjorda experimenten. Ett par hundra bilder bidraga till

att göra framställningen lättförståelig. Originalets fotografier ha ersatts med klara och rediga teckningar. Framställningen anknyter till tekniken, och man har fått en lärobok i elektroteknik av påtagligt värde särskilt för de tekniska skolorna. Men även vid våra läroverk och realskolor torde boken och därmed även bygglådan bli till stor nytta. Särskilt i mindre klasser, t. ex. i det differentierade latingymnasiet, bör studiet av elektricitetsläran bli mycket givande, om den vanliga läroboksframställningen kompletteras med försök ur bygglådan. Hela undervisningen kommer då att bygga på elevernas egna små upptäckter. Ett försök i denna riktning har undertecknad gjort. Eleverna ha visat mycket stort intresse för denna form av undervisning och ha ofta anhållit att få låna hem lådan för att sedan inför klassen demonstrera något försök. Risken är givetvis, att någon del kan gå förlorad, men i allmänhet inskränker sig förlusten till en eller annan skruv eller mutter, som lätt går att ersätta.

Ernst Knave.

Science Progress, A Quarterly Review of Scientific Thought, Work and Affairs. Vol. XXIX, No. 116, April 1935, pp. 593—800; Vol. XXX, No. 117, July 1935, pp. 1—192. Edward Arnold, London; varje vol. 7 s 6 d.

Detta naturvetenskapliga magasin, vars innehåll karakteriseras av dess titel, utkommer årligen med fyra 192-sidiga häften. Varje häfte innehåller ett halvt dussin längre artiklar behandlande aktuella problem. Dessutom förekomma en rad meddelanden från olika vetenskapsgrenar under rubriken »Recent Advances in Science». En rikhaltig recensionsavdelning — omfattande väsentligen engelsk och amerikansk litteratur — avslutar varje häfte. Årets april- och julinummer innehålla mycket läsvärt, såsom: High Voltage Cables, The Structure of Molecules, The Upper Atmosphere, The Solid State, Artificial Radioactivity, Hydraulic Cements, Industrial Physics, Dating the Ice Age in Britain.

Nature, A Weekly Journal of Science, May 4, 1935, Vol. 135, No. 3418, pp. 669—768 »Royal Jubilee Number». Macmillan & Co., London. One Shilling.

Med anledning av Konung Georgs av England 25-års jubileum har tidskriften *Nature* utgivit ett »Royal Jubilee Number», som förtjänar att uppmärksammas. Det är både billigt och innehållsrikt. En rad kända naturvetenskapsmän ha här i korta artiklar karakteriserat utvecklingen under det senaste kvartsseklet inom

sina resp. specialområden. Flera av dessa tvärsnitt utan skymmande detaljer äro små mästerverk i koncentration. Några rubriker: The Structure of the Universe, The New Age in Physics, Constitution of the Earth, The Measurement of Geological Time, Atomic Physics, Isotopes, Induced Radioactivity, X-Ray Crystal Analysis, Low Temperature Research, Cosmic Rays, Weather Forecasting, Adsorption Concepts in Chemistry, Special Steels, Progress in Radio Communication, The Perfection of the Thermionic Valve, Developments in Aeronautical Science.

Gradualavhandlingar.[1]

Arne Fredga, *Studien über Selen-di-karbonsäuren und Diselen-di-karbonsäuren.* Uppsala 1935, 232 sid. Disp. i Uppsala den 11 maj 1935. Opponenter: docent Erik Söderbäck och fil. kand. Ingvar Hedlund.

Studiet av organiska selenföreningar har först på senare år tillvunnit sig större intresse. Tidigare arbeten äro vanligen utförda av forskare, som i samband med undersökningar över svavelhaltiga substanser gjort tillfälliga exkurser på de analoga selenföreningarnas område. De sakna därför ofta systematisk karaktär och präglas av svavelkemiens i dessa fall mindre fruktbärande problemställningar och arbetsmetoder.

Föreliggande arbete utgör en undersökning över de enklaste symmetriska selen- och diselen-di-karbonsyrorna R—Se—R respektive R—Se—Se—R, där R betecknar olika karbonsyrerester (—CH_2—COOH, CH_3—CH(—)—COOH, C_6H_5—CH(—)—COOH etc.).

Ett flertal av dessa föreningar innehålla två likvärda asymmetriska kolatomer och böra därför förekomma i två optiskt inaktiva former, av vilka den ena skall kunna uppdelas i aktiva antipoder. Selen-di-karbonsyrorna förhålla sig i detta fall normalt, hos diselenföreningarna däremot är i regel endast den ena formen beständig. I flere fall har endast en inaktiv form kunnat framställas. Som i avhandlingen närmare utvecklas måste detta bero på någon reaktion, innebärande upplösning av bindningen mellan selenatomerna och kombinering med andra molekylhälfter.

Under vissa betingelser undergå diselen-di-karbonsyrorna dismutation, varvid bildas selenmerkaptoförening och seleninsyra. Då denna reaktion kunde visas vara reversibel, har man här den

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

närmast till hands liggande förklaringen till ovan relaterade förhållanden.

Av undersökningarna över syrornas reaktioner förtjänar vidare omnämnas att de lätt och kvantitativt kunna oxideras till föreningar innehållande fyrvärd selen; ur dessa kunna de ursprungliga syrorna glatt återvinnas genom reduktion. Diselen-di-karbonsyrorna reagera i vattenlösning påfallande lätt med metalliskt kvicksilver under merkaptidbildning.

Uppdelning i optiska antipoder har utförts i samtliga fall, där sådan teoretiskt varit möjlig (i tvenne fall har endast den ena antipoden kunnat erhållas i rent tillstånd). Då dessa uppdelningar ävensom separeringen av *racem-* och *meso*-former i flere fall varit förenade med svårigheter, har ett jämförelsevis stort utrymme måst ägnas åt preparativa frågor.

Den konfigurativa samhörigheten mellan de framställda optiskt aktiva föreningarna och deras förhållande till analoga svavelföreningar diskuteras på grundvalen av vridningsmätningar i ett flertal olika lösningsmedel. Även vid undersökningar över syrornas reaktionsförhållanden ha polarimetriska metoder i stor utsträckning kommit till användning. I flere fall ha värdefulla upplysningar vunnits genom vridningsmätningar vid successiva tillsatser av med syrorna reagerande ämnen (polarimetrisk titrering).

De elektrolytiska dissociationskonstanterna ha bestämts enligt i huvudsak klassiska metoder.

ARNE SANDSTRÖM, *An Investigation into X-Ray Absorption Spectra.* (Nov. Act. Reg. Soc. Scient. Ups. ser. IV. Vol. 9. N:o 11). Uppsala 1935, 92 sid. Disp. i Uppsala den 25 maj 1935. Opponenter: docent GUNNAR KELLSTRÖM och amanuens HARALD FLEMBERG.

Enligt den av H. JOHANN 1931 angivna principen för röntgenstrålars fokussering genom böjda kristaller konstruerade författaren en konkavkristallspektrograf särskilt avsedd för upptagandet av absorptionsspektra. Den utfördes så, att ett kontinuerligt spektrum med jämn intensitet erhålles över ett område av c:a 40 mm längd utan att några av spektrografens delar behöva förflyttas under pågående exponering. För att möjliggöra användande även vid de längsta tänkbara våglängder byggdes apparaten för högvacuum. Mätningarna utfördes med kvarts och gips som gitter. Våglängdsbestämningarna gjordes relativt höga ordningar av Kα-dubletten av elementen 22 Ti—30 Zn. Spektra registrerades fotografiskt.

Emedan fokusseringen ej är ideal komma vissa breddningseffekter att erhållas, vilket gör, att en våglängd återgives som en linje av ändlig bredd. Dessa effekter äro beroende av spektrografens dimensioner, kristallöppningen samt glansvinkeln. Genom lämpliga anordningar kunna deras verkningar emellertid nedbringas, så att de bli av ringa betydelse i jämförelse med den avsevärda vinsten i intensitet. De fel, som kunna uppstå genom gitterkonstantens förändring vid böjningen av kristallen, äro av den storleksordning, att de helt kunna försummas.

För tillverkning av de absorberande skikten har huvudsakligen använts förgasning i vacuumugn, varvid metallångorna kondenserats på 0,5 μ Al-folium. Härvid har erhållits synnerligen vackra skikt i tjocklekar varierande mellan 0,2 och 6,8 μ. Vid en del svårförgasade ämnen har det pulvriserade materialet slammats i med amylacetat utspätt zaponlack, varpå suspensionen upphällts på glasplattor, där den fått torka till tunna hinnor.

Spektrogrammen fotometrerades med SIEGBAHNS registrerande fotometer. Alla våglängdsmätningar utfördes på dessa fotometerkurvor. Detta förfaringssätt gjorde mätningarna mera objektiva, varjämte det möjliggjorde ett närmare studium av kanternas struktur och finstruktur. För huvudkanterna torde noggrannheten i våglängdsbestämningarna variera mellan 0,1 och 0,3 ‰. Bestämningarna omfatta L-seriens absorptionsspektra för elementen 29 Cu—52 Te samt K-absorptionsspektra för 12 Mg och 13 Al.

Genom en grafisk metod kan man visa, att L_{II}- och L_{III}-kanterna vid elementen 40 Zr—46 Pd representera övergångar från resp. nivåer till den vid dessa element ofullständigt besatta och troligen även oupplösta $N_{IV,\ V}$-nivån. Likaså representerar L_I-kanten vid elementen 48 Cd—52 Te en övergång till det ofullständiga $O_{II,\ III}$-skalet. Tidigare har författaren visat, att analoga förhållanden råda inom L- och M-serierna vid de tyngsta elementen. Som en allmän regel kan uppställas, att en absorptionskant representerar en elektronövergång till den första ofullständigt besatta yttre nivå, till vilken övergången är tillåten enligt urvalsreglerna. I likhet med VELDKAMP har författaren funnit, att när denna yttre nivå är den över huvud taget första ofullständigt besatta, så åtföljes kanten av en starkt markerad »vit linje», d. v. s. ett område med synnerligen kraftig absorption.

Vid koppar erhålles en absorptionslinje på den långvågiga sidan av L_{II}- och L_{III}-kanterna. Dessa absorptionslinjer uppkomma med säkerhet genom övergångar till en inre ofullständigt besatt nivå. En jämförelse med motsvarande emissionslinjer ($L\alpha_{1,2}$ och $L\beta_1$) visar, att det här är fråga om $M_{IV,\ V}$-nivåen.

L_{II}- och L_{III}-kanterna vid elementen 48 Cd—52 Te och 30 Zn —34 Se förete en struktur i själva kanten, som ger sig till känna därigenom, att intensitetsfallet sker i avsatser. I själva verket ha vi tre kanter (vid Cd fyra), av vilka den av längsta våglängd med hjälp av de modifierade moseleydiagrammen kan visas motsvara huvudkanten vid elementen nedanför och ovanför ifrågavarande grupper. De övriga kanterna måste tolkas såsom uppkomna genom övergångar till de covalenta bindningarnas nivåer. Samma slags struktur förefinnes vid magnesiums och aluminiums K-kanter.

Avhandlingens sista kapitel ägnas åt vad som vanligen benämnes kanternas finstruktur (tidigare sekundärkanter). Till denna finstruktur har L. Kronig givit en förklaring baserad på vågmekanisk grund. Enligt Kronig är finstrukturen endast beroende av absorbatorns kristallstruktur. Vid de kubiska gittren finner han, att energidifferenserna mellan detaljerna äro omvänt proportionella mot gitterkonstantens kvadrat. Detta befanns stämma för Rh och Pd. Enligt teorien borde vidare absorbatorns tre L-kanter uppvisa samma finstruktur. I den förhandenvarande undersökningen visade det sig, att mellan L_{II}- och L_{III}-kanternas finstrukturer ej finnes någon skillnad utöver felgränserna, varemot L_I-kantens ej överensstämmer med de båda förstnämndas. Detta måste bero på, att urvalsreglerna ha ett visst inflytande även på elektronövergångar till kristallgittrets »nivåer». [Enligt Kronigs nomenklatur »tillåtna zoner».]

I samband med studiet av finstrukturen befanns, att bredden av den L_{II}- och L_{III}-kanterna vid elementen 38 Sr—46 Pd åtföljande »vita» linjen är större vid L_{III}- än vid L_{II}-kanten. Även detta måste tillskrivas skillnaden i urvalsregler för övergångar från L_{II}- och L_{III}-nivåerna.

I K-absorptionsspektra av Al och Mg uppträda tre kanter på stort avstånd från huvudkanten. Dessa måste uppfattas som verkliga sekundärkanter uppkomna genom multipeljonisation. Den mest långvågiga av dessa kanter sammanfaller med $K\beta^{IV}$-linjen. I analogi med Druyvesteyns förklaring av denna linje kunna därför dessa sekundärkanter anses uppkomma genom avlägsnandet från K-nivåen av en elektron, när en resp. två eller tre L-elektroner saknas.

Till sist kan nämnas att föreliggande våglängdsmätningar utnyttjats för noggrannare beräkning av energinivåernas relativa värden vid elementen 29 Cu—52 Te än vad som tidigare varit möjligt. Härvid valdes p-elektronernas ändnivå till nollnivå.

Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1934—35.[1]

Göteborg: adjunkt J. Lundberg, Kemikursen i gymnasiet; Enskilt arbete i kemi; lektor R. Nyhlén, Gränsvärdebegreppet i gymnasieundervisningen.

Lund: lektor B. Svensson, Funktionsläran å gymnasiet; Geometriundervisningen i realskolan; Fysikalisk optik i förening med demonstrationer; lektor O. D. Gertz, Organisk kemi i heuristisk behandling; Fysiologisk kemi.

Stockholm: lektor E. Nordefeldt, Det enskilda arbetets princip och dess tillämpning inom de naturvetenskapliga ämnena; lektor M. Sjöström, Om det enskilda lärjungearbetet i fysik; lektor Hj. Olsson, Ekvationsläran och algebran i realskolan.

Uppsala: adjunkt J. Palmgren, Om läroverkets kemiska institution, med historik; lektor B. Eriksson, Om läroverkets lokaler för undervisning i gymnasiet (övning); adjunkt P. Granath, Om läroverkets lokaler för undervisning i fysik (övning).

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgives av Svenska Kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. 47 (1935). N:r 1 (jan.): S. Hähnel och Britta Holmberg, Kombinerade indikatorer. — H. Burström, Kationsbestämningar i sockerbetsaft på spektralanalytisk väg. — H. von Euler, Zur Kenntnis der Phosphatese-Wirkung. — N:r 2 (febr.): S. Bodforss, Reaktionskinetiska mätningar med hjälp av ljusextinktionen. — Enkel apparatur för ljuselektrisk extinktionsbestämning. — H. Larsson, Über die Bedeutung der Diffusion in Konzentrationselementen. — H. von Euler und G. Günther, Einfluss des Phosphagens auf den Verlauf der zellfreien alkoholischen Gärung. — N:r 3 (mars): C. Hommerberg, Studien über die Phosphatase der Hefe. — N:r 4 (april, Berzeliushäfte): A. Mittasch, Berzelius und die Katalyse. — A. Holmqvist, Antimonelektroden. — N:r 5 (maj): J. A. Reuterskiöld, Über einen Versuch durch potentiometrische Messungen einen Reaktionsverlauf zu verfolgen. — E. Hägglund und H. Nihlén, Über Zuckerbildung und Zuckerabbau bei dem Sulfitzellstoff-Kochprozess. — N:r 6 (juni): A. Hedvall och I. Afzelius, Über einen Licht-Dunkel-Effekt in Bezug auf das Absorptionsvermögen der Phosphore. — A. Hedvall, Über Reaktionsfähigkeit und katalytische Aktivität der festen Materie in Übergangszuständen. — Referat och översikter. — Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor (bl. a. i aprilhäftet statistisk översikt över den svenska kemiska industrien under 1934).

[1] Uppgifterna ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska avdelning. Inga uppsatser av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll förekomma i de allm. läroverkens, seminariernas eller de tekniska läroverkens årsredogörelser för 1934—35.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XVI, dubbelh. 1—2.
Ur innehållet. C. Schalén, Lysande nebulosor och mörk materie inom vintergatsystemet. — S. Holm, Några drag ur spegelteleskopets historia. — Å. Wallenquist, Bestämning av stjärnornas diametrar, volymer, massor och tätheter. — K. G. Malmquist, De statistiska undersökningarna rörande stjärnsystemets byggnad. — B. Lindblad, Den nya stjärnan i stjärnbilden Herculés.

Industritidningen Norden. Årg. 1935 h. 10—35.
Ur innehållet. Radiotekniska nyheter. — Elektrisk glassmältning. — Moderna högtalareanläggningar. — Centrifugalpumparnas karakteristikor. — Användning av silumin. — Centrifugalpumpens teori. — Moderna elektriska mätinstrument. — Termisk utvinning av magnesium. — Ur den kemiska facklitteraturen; patent och tidskriftsnytt. — Självantändning av stenkol. — Metalliskt järn ur dess oxider. — Kraftöverföring medelst högspänd likström. — Konstgjorda diamanter. — Åskan. — Patentbeskrivningar.

Era. Årg. 1934 h. 3—8.
Ur innehållet. Mot radiostörningarna. — Den elektriska utrustningen i ett modernt silomagasin. — Televisionen. — Arsenikimpregnering av trä. — Luftkonditionering. — Teori för åskans uppkomst. — Kylningsanläggningar. — Elektroteknikens måttsystem. — Ett stort antal elektriska nyheter.

Tidskrift för ljuskultur. Årg. 1935 h. 1—2.
Ur innehållet. Artificiell belysning vid fotografering. — Hur vi se. — Automobilbelysning, Stationär vägbelysning, Belysning i tennishallar. — En ny högeffektlampa. — Mätmetoder för provning av belysningsglas. — Notiser om belysningsnytt.

Matematisk Tidsskrift. København 1935 h. 1—2.
Ur innehållet i avd. **A.** J. Nielsen, C. C. Hansen. — J. Hjelmslev, Virkelighedsgeometriens Betydning. — G. Boldsen, Potens. — D. Fog, Om Konstruktion med Passeren alene. — J. Osterg\ard, Multiplikation av komplexe Tal. — Eksamensopgaver; Opgaver til Undervisningsbrug. Avd. **B.** D. Fog, C. Juel. — J. Mollerup, T. Bonnesen. — H. Busemann und W. Feller, Bemerkungen zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen. — R. Petersen, Differentation af Fourierudviklingen for en næstenperiodisk Funktion. — Opgaver. — Litteraturanmeldelser.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1935 h. 1—2.
Ur innehållet. V. Brun, Kulens overflate og volum. En variasjon av Arkimedes fremgangsmåte. — P. Heegaard, Et brev fra Abel til Degen. — O. Flach, Cirkelsystemer. — Opgaver. — Bokanmeldelser.

Fysisk Tidsskrift. København 1934 h. 5—6, 1935 h. 1—2.
Ur innehållet H. M. Hansen, Birgit Trolle. — J. Ambrosen, Atomsønderdeling og kunstig Radioaktivitet. — R. E. H. Rasmussen, Om Molekularstraaler. — W. Heisenberg, Ændringer i Grundlaget for de eksakte Naturvidenskaber i den nyeste Tid. — R. E. H. Rasmussen, Lidt moderne Akustik. — R. W. Asmussen, Om Kvanteeffekter ved Reaktioner med de 2 Brintisotoper. — C. Jensen, Skoleforsøg fra den mekaniske Fysik. — J. Hansen, Om Kastebevægelsen; Et roterende Legemes Bevægelseenergi.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

766) *Linjerna l, m och n bilda en triangel med hörnen på kurvan* $y(x+1)=x$. *Sidorna råka x-axeln i L, M och N samt y-axeln i* L_1, M_1 *och* N_1 *resp. Visa, att* $LM:MN=L_1M_1:M_1N_1$. *X.*

767) *Beräkna summan av serien*

$$\left(\frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin^2 4\alpha}{4}\right)^2+\left(\frac{\sin^2 8\alpha}{8}\right)^2+\cdots$$

X.

768) *I pyramiden PABC är* $PA=a$, $PB=b$ *och* $PC=c$. *Sidovinklarna i P äro alla 60°. Beräkna avståndet från P till tyngdpunkten för triangeln ABC.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

Rättelse: Svaret till uppg. 760 bör vara $6\sqrt{3}$.

769) Lös ekvationen

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\cos 2x.$$

Svar: $n\,.\,180°$; $\pm 35°{,}26+n\,.\,180°$.

770) Lös ekvationen

$$\cos x\,.\,\cos 2x\,.\,\cos 3x=0{,}25.$$

Svar: $\pm 60°+n\,.\,180°$; $22°{,}5+n\,.\,45°$.

771) I en triangel ABC skär bissektrisen till vilkeln A sidan BC i D och medianen från A skär BC i E. $AD=DE=4$ cm och $AE=6$ cm. Bestäm triangelns sidor.

Svar: $6\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$ och 24 cm.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 769—771 äro insända av *B. N.*, 772 av *Yx*, 773 av *Eve*, 774—781 av *X*, 782—783 av *S. B.*

772) I den vid A rätvinkliga triangeln ABC råka bissektriserna till vinklarna B och C kateterna i resp. P och Q. Visa, att $\cot \angle BPQ = 2 + tg \frac{B}{2}$.

773) Ett rektangulärt papper, vars längd är 18 cm och bredd 12 cm vikes: ena gången så, att ett av papperets hörn faller på den ena kortsidans mittpunkt; andra gången så, att ett av papperets hörn faller på den ena långsidans mittpunkt. Beräkna längderna av de linjer, utefter vilka vikning skett.

Svar: $4\sqrt{10}$ och $15\frac{5}{8}$ cm resp.

774) I triangeln ABC är $AB = AC$. På BC uppritas åt motsatt håll en med ABC likformig triangel BCD; AD delar fyrhörningens $ABDC$ yta i förhållandet 1 : 2. Sök vinkeln A.

Svar: 90° eller 41°,41.

775) I triangeln ABC är $tg B \,.\, tg C = 2 \sin^2 A$. Visa, att $a^4 = b^4 + c^4$.

776) I samma cirkel äro inskrivna en regelbunden 6-hörning, en regelbunden n-hörning och en regelbunden $2n$-hörning. För vilket värde på n gäller, att $s_n^2 = s_6^2 + s_{2n}^2$?

Svar: $n = 5$.

777) Basytan i en pyramid med lika långa sidokanter är en rektangel. Kroppens kantvinklar ha storleken α, β, och γ. Visa, att $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = 0$, om α är den största kantvinkeln.

778) Radien i ett klot A är 8 cm. Klotets volym delas i förhållandet 1 : 2 av en klotyta B, som går genom A:s centrum. Beräkna radien i klotet B.

Svar: 9 cm.

779) En triangels tyngdpunkt ligger i punkten (1; 1). Ett hörn ligger på x-axeln, ett på y-axeln och det tredje på linjen $x + y = 11$. Ytan är 13,5 enheter. Angiv koordinaterna för det sistnämnda hörnet.

Svar: (4; 7); (7; 4); (10; 1); (1; 10).

780) Beräkna vinkeln mellan de två linjer som ekvationen $(x^2 + y^2)\sin\alpha + 2xy = 0$ representerar $(-90° < \alpha < 90°)$.

Svar: $90 \pm \alpha$.

781) Till parabeln $y^2 = 2px$ dragas två tangenter. Visa, att ordinatan för deras skärningspunkt är medeltalet till kontaktpunkternas ordinator.

782) Kurvan $y = a + bx - x^2$ skär x-axeln under 60° och y-axeln under 45°. Bestäm a och b.

Svar: $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$.

783) En med x-axeln parallell linje skär kurvan $y = 5x^2 - x^4$ i ordning i A, B, C och D. Bestäm linjens ekvation, om $BC = \frac{AD}{3}$.

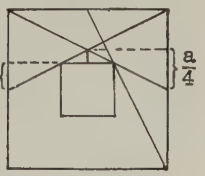
Svar: $y = 2\,{}^1/_4$.

784) På kurvan $y = x^3 + mx + p$ ligga tre punkter i rät linje. Bevisa, att summan av deras abscissor alltid är $= 0$.

Lösningar till uppg. 725—727.

725) *En kub är given. Man betraktar de 24 plan, som vart och ett innehåller en kantlinje i kuben och mittpunkterna till två andra. Hur stor del av kubens volym utgör det sammanhängande område kring kubens centrum, som dessa plan avgränsa?* X.

Den givna kubens kantlinje betecknas med a. Den ifrågavarande kroppen kan (enl. figuren) uppfattas som en kub med kantlinjen $\frac{a}{3}$



jämte 6 räta pyramider med höjden $\frac{a}{4} - \frac{a}{6} = \frac{a}{12}$, som ha var sin av denna kubs sidoytor till basytor. Det sökta förhållandet är därför $\frac{1}{3^3} + \frac{6}{3} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$.

X.

726) *En kula med diametern ka, där a är ett positivt tal och k ett egentligt bråk, utför en sinussvängning, så att medelpunkten oscillerar mellan punkterna (a; o) och (— a; o). En likadan kula svänger längs y-axeln med samma periodtal och amplitud. Hur stor måste fasförskjutningen minst vara, om kulorna hela tiden skola gå fria från varandra?* X.

Äro $a \sin x$ och $a \sin (x + \varphi)$ medelpunkternas avstånd från origo, är kvadraten på avståndet mellan dem $a^2[\sin^2 x + \sin^2(x + \varphi)] =$
$= \frac{a^2}{2}[2 - \cos 2x - \cos(2x + 2\varphi)] = a^2[1 - \cos \varphi \,.\, \cos(2x + \varphi)]$.

Sättes (för φ konstant) uttryckets minimivärde $a^2(1 - \cos\varphi) > k^2a^2$, så fås $\cos \varphi < 1 - k^2$, som är det sökta villkoret. *S. B.*

727) *Om en rörlig tangent skär tre fixa tangenter a, b, c, till en parabel i resp. A, B, C, så är förhållandet AB : BC konstant. Visa med hjälp av denna sats (eller på annat sätt), att styrlinjen till den parabel, som tangerar sidorna i en i en cirkel inskriven fyrhörning går genom diagonalernas skärningspunkt.* X.

Om ordinatorna för de fixa tangenternas kontaktpunkter betecknas med a, b och c samt för den rörliga tangentens kontakt-

punkt med y, så blir (se ex. 781) ordinatorna för A, B och C resp. $\frac{a+y}{2}$, $\frac{b+y}{2}$ och $\frac{c+y}{2}$, varav $AB : BC = (a-b) : (b-c)$, alltså oberoende av y.

Fyrhörningen är $ABCD$, diagonalernas skärningspunkt är S. Drag endera bissektrisen till vinklarna i S. Denna skär AB i P och CD i Q. Ligga A och C på var sin sida om S, måste B och D även göra det, och PQ är samtidigt inre eller yttre bissektris i trianglarna ASB och CSD. Motsvarande gäller, om S ligger utanför cirkeln. I varje fall är $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{DQ} : \overrightarrow{QC}$, ty dessa förhållanden ha samma tecken och deras numeriska värden äro enligt bissektrissatsen $SA : SB$ och $SD : SC$, vilka enligt kordasatsen äro lika. Då man genom P endast kan lägga en tangent till parabeln utom AB, måste enligt hjälpsatsen SP vara denna tangent. Då detsamma kan bevisas om den andra bissektrisen i S, så följer, att styrlinjen såsom ort för skärningspunkten mellan två mot varandra vinkelräta tangenter måste gå genom S. *X.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen.

Augusti 1935.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I en romb delas den ena diagonalen i tre lika stora delar av den inskrivna cirkelns periferi. Beräkna rombens vinklar.
2. Mellan två kuststationer A och B löper en 3,5 km lång, rak strandlinje. Ett fartyg F observeras samtidigt från A och B. Vinklarna FAB och FBA äro resp. 42°,3 och 23°,2. Hur långt från stranden befinner sig fartyget?
3. Två cirklar med radierna 9 och 4 cm tangera varandra utantill. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av cirklarnas gemensamma tangenter.
4. I en triangel äro två sidor a och $3a$ cm och mellanliggande vinkel 120°. Beräkna avståndet från denna vinkels spets till den inskrivna cirkelns medelpunkt.

5. En person hade förbundit sig att till en stiftelse utbetala 1 000 kr. vid början av vart och ett av åren 1920 till och med 1939. Personen avled år 1926 (betalningen för detta år var erlagd), och arvingarna önskade genom en enda inbetalning i början av år 1927 infria vad som återstod av den åtagna förbindelsen. Hur stor summa skulle de då erlägga, om ränta på ränta beräknas efter 4 %?
6. Bestäm på grafisk väg koordinaterna för skärningspunkterna (en decimal medtages) till kurvorna $x = y^2 - 2y - 1$ och $x = 5 - y^2$.
7. $ABCD$ är ett parallelltrapets, där AB är parallell med DC samt AB mindre än DC. AB är $2a$ cm, AD och BC vardera $3a$ cm. En cirkel tangerar sidorna AB, AD och BC samt utskär på sidan DC en korda $= 2a$ cm. Beräkna höjden i trapetset.
8. Lös ekvationssystemet: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy + 2x + 2y = 1. \\ x^2 + y^2 + 5xy + 5 = 0. \end{cases}$

Resultat: **1.** 38°,94; 141°,06. **2.** 1,02 km. **3.** 86,4 cm². **4.** $(4 - \sqrt{13})\,a$ cm. **5.** 10 390 kr. **6.** $x_1 = 3{,}3$; $y_1 = -1{,}3$ och $x_2 = -0{,}3$; $y_2 = 2{,}3$. **7.** $a\sqrt{3 + \sqrt{20}}$ cm. **8.** $\begin{array}{c|cccc} x & 2 & -1 & -2 + \sqrt{11} & -2 - \sqrt{11} \\ y & -1 & 2 & -2 - \sqrt{11} & -2 + \sqrt{11} \end{array}$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.
(1928 års stadga.)

1. I en likbent triangel drages från basens ena ändpunkt en linje, som delar motstående sida i förhållandet 1 : 2. Vinkeln mellan den dragna linjen och basen är 60°. Beräkna triangelns vinklar.
2. I ett klot med radien r är en regelbunden tresidig pyramid inskriven, vars sidokanter äro dubbelt så långa som baskanten. Bestäm baskantens längd.
3. Lös ekvationen
$$\cot 2x + \cot^2 x = 1.$$
4. Det finnes ett värde på a, för vilket ekvationerna
$$x^4 - 5x^3 - x^2 + 23x - a = 0$$
och
$$x^4 - 7x^3 + x^2 + 35x - a = 0$$
hava två gemensamma rötter. Bestäm detta och lös sedan ekvationerna.
5. Omkring en given kub, vars kant är $= a$, är en regelbunden kvadratisk pyramid omskriven så, att fyra av kubens hörn ligga

i pyramidens bottenyta, medan de övriga ligga på var sin av pyramidens sidokanter. Bestäm pyramidens höjd, då dess volym är $= \frac{8}{8} a^3$.

6. Två vinklar i en triangel äro 58° och 74°. Radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln är 40 cm. Hur stor är radien i den i triangeln inskrivna cirkeln?
7. En person köpte den 31 mars 1928 en stadsfastighet. En till fastigheten hörande gårdsbyggnad är emellertid dömd att rivas och får icke användas efter den 30 september 1933, varom säljaren icke underrättat köparen. Denne yrkar inför domstol skadestånd med ett belopp lika med det värde, som den utdömda byggnaden, om den fått stå kvar allt framgent, kunde anses hava, när köpet skedde. Från detta belopp finner dock domstolen böra avgå det till den 31 mars 1928 reducerade värdet av de inkomster, köparen haft eller väntas få av nämnda gårdsbyggnad. Dessa inkomster äro: 987 kr., som utfalla den 30 september 1928, och därefter varje 30 september t. o. m. år 1933 ett belopp på 2 280 kr. Hur stort kapital, utbetalat den 31 mars 1928, kan anses motsvara dessa inkomster, om ränta på ränta beräknas efter 4 % och räntan lägges till kapitalet varje år den 31 december?
8. En ellips med halvaxlarna a och b är given. På vilket avstånd från ellipsens medelpunkt skall en med den mindre axeln parallell korda dragas, för att summan av kordans längd och dess avstånd från medelpunkten skall bliva den största möjliga?
9. En rätvinklig triangel är inskriven i en parabel så, att den räta vinkelns spets faller i parabelns topp. Visa att hypotenusan alltid skär parabelns axel i samma punkt.

Resultat: **1.** Toppvinkeln 32°,20 eller 13°,18. **2.** $\frac{r\sqrt{33}}{6}$. **3.** $45° + n \cdot 90°$; $116°,57 + n \cdot 180°$. **4.** $a = 6$; ekvationernas rötter resp. 3; -2; $2 \pm \sqrt{3}$ och 3; -2; $3 \pm 2\sqrt{2}$. **5.** $2a$ eller $a(3 + \sqrt{5})$. **6.** 18,99 cm. **7.** 10 920 kr. **8.** $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$. **9.** I punkten $(4a; 0)$, om parabelns ekv. är $y^2 = 4ax$.

(1933 års stadga.)

Uppgifterna 1—7 utgjordes av uppg. 1—7 i ovanstående skrivning enl. 1928 års stadga.

8. En cirkel har sin medelpunkt på linjen $x + y - 2$ och tangerar linjerna $x - 2y = 0$ och $x - 2y = 10$. Sök cirkelns ekvation.

9. En rät linje, som tangerar kurvan $y = x^3 - \frac{5}{3}x$ i en punkt A utanför origo med abscissan x, skär kurvan i en annan punkt B med abscissan $-2x$. Sök vinkelkoefficienten för den räta linjen AB, om den i B skär kurvan under rät vinkel.

Resultat: 8. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$. 9. -1 eller $-\frac{1}{4}$. Man torde observera, att det angivna sambandet mellan abscissorna gäller för *varje* rät linje, som tangerar kurvan i en punkt A och skär den i en punkt B (Jmf. ex. 784, sid. 211 i detta häfte). Denna upplysning underlättar — men är ej nödvändig för — beräkning av den efterfrågade vinkelkoefficienten.

Uppgifter i fysik.

1. En dubbeltrappstege med gångjärn upptill har formen av bokstaven A. Vinkeln mellan de båda benen är 50°, och de hindras att glida isär medelst ett snöre fäst vid vartdera benets mittpunkt. Huru mycket ändras spänningen i detta snöre, om en tyngd av 60 kgf placeras på stegens topp. Friktionen försummas.
2. Från nedre kanten av ett strävt, lutande plan, som bildar 30° vinkel med horisontalplanet, kastas en kropp uppför planet. Kroppen uppnår sitt högsta läge efter 5,1 sek och återkommer efter ytterligare 8,1 sek till utgångspunkten. Beräkna friktionskoefficienten.
3. Från en i horisontalplanet belägen punkt utkastas en kropp under sådan elevationsvinkel, att kroppen i det ögonblick, då den nått banans högsta punkt, besitter hälften av sin ursprungliga rörelseenergi. Beräkna elevationsvinkeln.
4. Gasernas allmänna tillståndslag kan skrivas under formen $p \cdot v = R \cdot T$, där p är trycket, v volymen, T den absoluta temperaturen och R en konstant. Beräkna R, då lagen tillämpas på 20 g kvävgas. Trycket skall uttryckas i atmosfärer, volymen i liter. Kvävgasens specifika vikt i förhållande till luft av samma tryck och temperatur är 0,9674. Luftens specifika vikt vid 0° C och 760 mm tryck är 0,001293, utvidgningskoefficienten $= \frac{1}{273}$.
5. En punktformig ljuskälla befinner sig på huvudaxeln till en tunn positiv lins, varvid en reell bild erhålles på en skärm, som befinner sig på 104 mm avstånd från linsen. Mellan denna och skärmen inskjutes en tunn negativ lins. De båda linsernas huvudaxlar sammanfalla, och avståndet mellan linserna är 32 mm. Skärmen måste nu flyttas 108 mm, för att en tydlig reell bild skall falla på densamma. Hur stor är den negativa linsens brännvidd?

6. Polerna av ett galvaniskt element A, vars inre motstånd icke kan försummas, äro förbundna genom en homogen, jämntjock metalltråd L av 1 500 mm längd. Negativa polen av ett normalelement B med e. m. k. 1,018 volt är förbunden med negativa polen av A. Om B:s positiva pol förbindes med en punkt på L, som ligger 100 mm från A:s positiva pol, blir en i serie med elementet B inkopplad galvanometer strömlös. Ledningstråden L utbytes härefter mot en tråd L_1 av samma slag men 2 000 mm lång. Negativa polerna av A och B äro alltjämt förbundna med varandra. Genom galvanometern passerar nu ingen ström, om B:s positiva pol förenas med en punkt på L_1, som ligger 250 mm från A:s positiva pol. Beräkna det galvaniska elementets e. m. k.
7. För att bestämma jordmagnetismens horisontalkomposant ledes en elektrisk ström genom en i magnetiska meridianplanet vertikalt uppställd cirkelformad ledare med ett trådvarv av 15,0 cm radie. I ledarens centrum befinner sig en mycket kort, i horisontalplanet rörlig magnetnål. En silvercoulometer jämte ett reglerbart motstånd äro inkopplade i serie med ledaren. Kompassnålens utslag hålles under försöket oförändrat, 22°,8. Under 90 sek utfälles 202 mg silver. Beräkna horisontalkomposanten. För utfällning av en gramekvivalent åtgår 96 494 coulomb. Silver är envärt och har atomvikten 107,88.
8. Ett konstant batteris elektromotoriska kraft är 24 volt och dess inre motstånd 2 ohm. Om batteriet slutes genom ett yttre ledningsmotstånd r_1, blir batteriets polspänning 22 volt, och om det i stället slutes genom ett annat motstånd r_2, blir polspänningen 20 volt. Huru förhåller sig den i förra fallet i motståndet r_1 till den i senare fallet i motståndet r_2 utvecklade effekten?

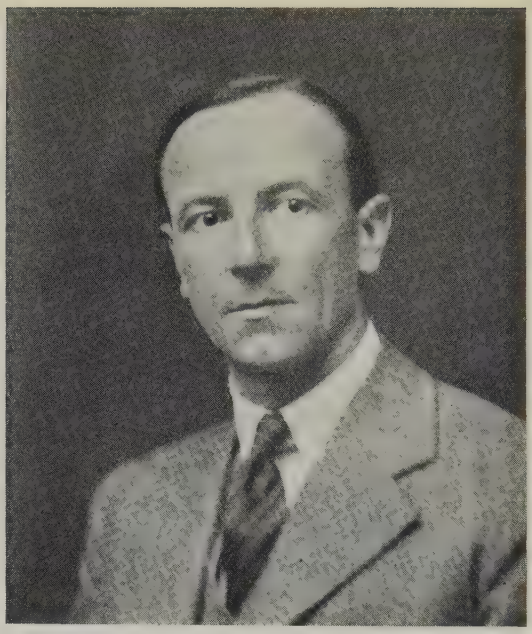
Resultat: **1.** 28,0 kgf. **2.** 0,250. **3.** 45°. **4.** 0,05856. **5.** — 120 mm. **6.** 1,454 V. **7.** 0,2001 gauss. **8.** $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$.

Nobelprisen i fysik och kemi.

Endast vid tvänne föregående tillfällen hava den Svenska Vetenskapsakademiens val av nobelpristagare i fysik och kemi utmärkts av samma homogenitet i fråga om de prisbelönade arbetenas art som i år är fallet, nämligen 1904, då ädelgasernas upptäckt belönades med fysikpriset till lord Rayleigh, kemipriset till W. Ramsay, och 1926, då J. Perrin och The Svedberg, kolloidkemiens mästare erhöllo var sitt motsvarande pris. De arbeten, som i år prisbelönats, falla båda inom kärnfysikens område och äro i viss mån ömsesidigt beroende av varandra.

1935 års Nobelpris för fysik har av Vetenskapsakademien tilldelats den engelske forskaren J. Chadwick för hans upptäckt av neutronen. Det är en snart 25-årig, framgångsrik och huvudsakligen på studiet av atomkärnan inriktad forskargärning, som logiskt kulminerat i denna synnerligen betydelsefulla upptäckt.

James Chadwick är född 1891 och blev efter avslutade studier assistent hos Rutherford i Cambridge, där han även varit professor i fysik, tills han i år tillträdde en professur i samma ämne vid universitetet i Liverpool. Hans tidigare arbeten gällde rent radioaktiva problem, t. ex. uppväckandet av γ-strålar medelst β-strålar (1912) och β-strålarnas hastighetsfördelning (1914), men senare har han uteslutande ägnat sig åt studiet av atomkärnan. Ett mycket betydelsefullt arbete utgjorde den direkta bestämningen (1920) av platinas, silvers och koppars kärnladdningar genom spridningsförsök med α-partiklar i dessa metaller. Som Rutherfords lärjunge och assistent har Chadwick deltagit i de atomsprängningsförsök, som två år efter Rutherfords första, banbrytande upptäckt av kvävekärnans sprängning, år 1921



James Chadwick, nobelpristagare i fysik.

återupptogos i Cambridge, och som resulterade i den artificiella sönderdelningen av bor, kväve och grundämnena fr. o. m. fluor t. o. m. kalium vid beskjutning med α-partiklar. Tillsammans med Rutherford har Chadwick utvecklat »satellithypotesen» för atomkärnan.

Det var sålunda en med rik erfarenhet om atomkärnan rustad forskare, som 1932 angrep problemet om den av Bothe och Becker upptäckta, av I. Curie och Joliot närmare undersökta, genomträngande berylliumstrålningens natur och gav den förklaring, som nu fått sin officiella belöning. Förutsättningarna för denna upptäckt och neutronens egenskaper hava nyligen ingående skildrats i denna tidskrift (O. Lundquist, Neutronen, Årg. 17: 2, juni 1934), varför en upprepning därav nu kan anses opåkallad.

Frédéric Joliot—Irène Curie, nobelpristagare i kemi.

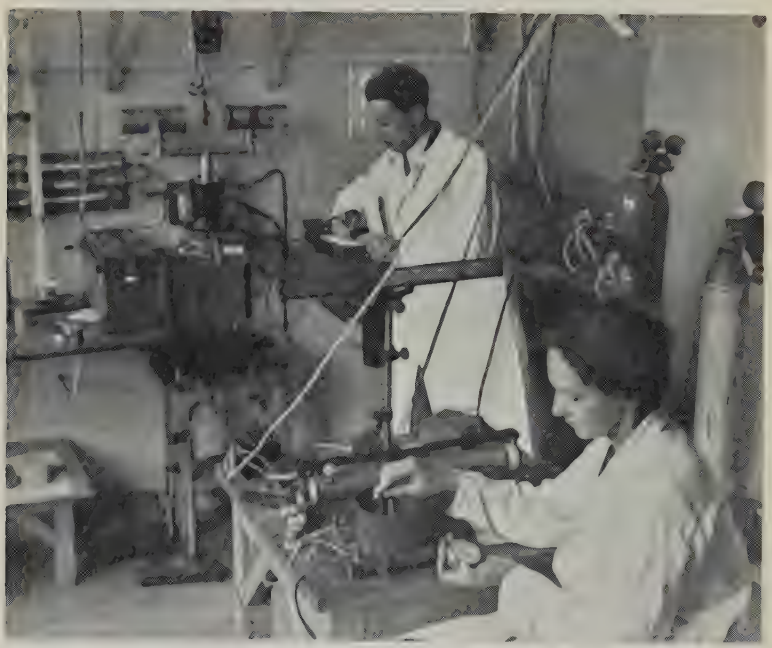
Årets kemipris har av Vetenskapsakademien tilldelats det franska forskarparet I. Curie—F. Joliot för deras upptäckt av den artificiella radioaktiviteten.

Även för denna upptäckt liksom för de på densamma följande arbetena, särskilt av Fermi, har i tidskriften helt nyligen lämnats en ingående redogörelse (O. Lundquist, Om inducerad radioaktivitet, Årg. 18: 2, juni 1935 och detta häfte sid. 280), vartill här må hänvisas.

Irène Curie, dotter till M. och P. Curie, är född 1897. Som självständig forskare framträdde hon relativt sent, nämligen 1923 med en undersökning av γ-strålar från RaD. Senare har hon framför allt arbetat med polonium och bl. a. bestämt räckvidden av och joniseringskurvan för dess α-strålning; i samband därmed α-partikelns hastighetsändring vid slutet av sin bana (1925).

F. Joliot är född 1900 och sedan 1925 laborator vid Curie-laboratoriet i Paris. Tillsammans med I. Curie har han bestämt jonisationskurvan för α-partiklar från RaC. (1925) och antalet av en enda α-partikel bildade joner (1928).

Det nu prisbelönade forskarparet har även utfört grundläggande undersökningar över berylliumstrålningen (se Lundquist, loc. cit. 1934), vilken den rätta tolkningen därav blev Chadwick förbehållen.



Makarna Curie—Joliot i sitt laboratorium.

G. Starck.

En generalisering av den Euler'ska pentagonaltalsatsen.

Av HUGO TEGNÉR.

Den Euler'ska pentagonaltalsatsen

$$(1) \qquad \prod_{\sigma=1}^{\infty}(1-x^{\sigma}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\mu}x^{\frac{3\mu^2-\mu}{2}},$$

d. v. s.

$$(1') \qquad (1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\ldots = 1-x-x^2+x^5+ \\ +x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots,$$

vars aritmetiska tydning gavs av Legendre, kan generaliseras, så att i högra ledet pentagonaltalen $\frac{1}{2}(3\mu^2-\mu)$ ersättas av polygonaltalen $\frac{1}{2}[n\mu^2-(n-2a)\mu]$. Efter tillkomsten av nedanstående uppsats har författaren funnit, att denna generalisering redan framlagts av von Sterneck.[1] Men som dennes framställning stöder sig på pentagonaltalsatsen, medan författarens innehåller ett direkt bevis för generaliseringen med pentagonaltalsatsen som specialfall, kan måhända nedanstående deduktion försvara sin plats.

§ 1.

I det följande antages variabeln x tillräckligt liten, varigenom oändliga summor och produkter bli konvergenta.

[1] Se P. BACHMANN, Niedere Zahlentheorie II, S. 173, 176.

Jag sätter ($m, n =$ hela pos. tal, $m \geqq n$)

$$(2) \qquad f_m(x) = \prod_{\sigma=1}^{m} (1 - x^\sigma); \quad f_0(x) = 1,$$

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_x = \frac{f_m(x)}{f_n(x) f_{m-n}(x)} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} \cdot \frac{1 - x^{m-1}}{1 - x^{n-1}} \cdots \frac{1 - x^{m-n+1}}{1 - x}.$$

Ur (3) följer

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_x = 1,$$

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} m \\ m - n \end{bmatrix}_x.$$

Vidare är

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_x = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} \begin{bmatrix} m - 1 \\ n - 1 \end{bmatrix}_x = \frac{1 - x^m}{1 - x^{m-n}} \begin{bmatrix} m - 1 \\ n \end{bmatrix}_x,$$

alltså

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} m - 1 \\ n - 1 \end{bmatrix}_x + x^n \begin{bmatrix} m - 1 \\ n \end{bmatrix}_x$$

$$(6') \qquad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} m - 1 \\ n \end{bmatrix}_x + x^{m-n} \begin{bmatrix} m - 1 \\ n - 1 \end{bmatrix}_x.$$

Analogien med benten [1] $\binom{m}{n}$ är påtaglig. Man kan erhålla en mängd formler analoga med de olika bentformlerna. Ävenså kan definitionen (3) utsträckas till att gälla för negativa, över huvud taget godtyckliga värden på m.

[1] = binomialkoefficienten.

§ 2.

Nu inför jag beteckningarna

$$(7)\quad C(y, z_1, z_2) = \prod_{\sigma=1}^{\infty}(1 - y^\sigma) \cdot \prod_{\sigma=0}^{\infty}(1 - y^\sigma z_1) \cdot \prod_{\sigma=0}^{\infty}(1 - y^\sigma z_2),$$

$$(8)\quad R_m(y, z) = \prod_{\sigma=0}^{m\ \ 1}(1 - y^\sigma z).$$

Enligt (3) finner man

$$R_2(y, z) = (1 - z)(1 - yz) = 1 - (1 + y)z + yz^2$$

$$= 1 - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_y z + yz^2,$$

och enligt (6′)

$$R_3(y, z) = R_2(y, z) \cdot (1 - y^2 z)$$

$$= 1 - \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_y + y^2\right) z + \left(1 + y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_y\right) yz^2 - y^3 z^3$$

$$= 1 - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_y z + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_y yz^2 - y^3 z^3.$$

Genom att upprepa detta förfarande erhåller man med hjälp av (6′)

$$(9)\quad R_m(y, z) = \sum_{\tau=0}^{m} (-1)^\tau \begin{bmatrix} m \\ \tau \end{bmatrix}_y y^{\binom{\tau}{2}} z^\tau,$$

således [1]

$$(9')\quad \prod_{\sigma=0}^{m-1}(1 - y^\sigma z) = \sum_{\tau=0}^{m} (-1)^\tau \begin{bmatrix} m \\ \tau \end{bmatrix}_y y^{\binom{\tau}{2}} z^\tau.$$

Som enligt (6)

$$\lim_{x=1} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_x = \binom{m}{n},$$

[1] Jfr E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, 2:te Aufl., S. 143.

erhåller man ur (9′) för $y = 1$ *binomialteoremet:*

$$(1 - z)^m = \sum_{\tau=0}^{m} (-1)^\tau \binom{m}{\tau} z^\tau.$$

Om man låter m obegränsat växa, så övergår $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_y$ enligt (3) till

$$\lim_{m=\infty} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_y = \frac{f_\infty(y)}{f_n(y) f_\infty(y)} = \frac{1}{f_n(y)}$$

och (9) till

$$R_\infty(y, z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^\tau \frac{y^{\binom{\tau}{2}} z^\tau}{f_\tau(y)}. \tag{10}$$

Enligt (7) är

$$C(y, z_1, z_2) = f_\infty(y) \,.\, R_\infty(y, z_1) \,.\, R_\infty(y, z_2). \tag{11}$$

§ 3.

Men om

$$z_1 \,.\, z_2 = y, \tag{12}$$

får man enligt (10)

$$R_\infty(y, z_1) \,.\, R_\infty(y, z_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(z_1 z_2)^\mu \,.\, y^{2 \cdot \binom{\mu}{2}}}{f_\mu{}^2} +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(z_1{}^{\mu+\nu} \,.\, z_2{}^\mu + z_1{}^\mu \,.\, z_2{}^{\mu+\nu}) \,.\, y^{\binom{\mu}{2} + \binom{\mu+\nu}{2}}}{f_\mu \,.\, f_{\mu+\nu}} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{y^{\mu^2}}{f_\mu{}^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (z_1{}^\nu + z_2{}^\nu) y^{\binom{\nu}{2}} \,.\, \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{y^{\mu(\mu+\nu)}}{f_\mu \,.\, f_{\mu+\nu}},$$

alltså

$$(13)\quad R_\infty(y, z_1) \cdot R_\infty(y, z_2) = F_0(y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (z_1^{\,\nu} + z_2^{\,\nu})\, y^{\binom{\nu}{2}} F_\nu(y),$$

där

$$(14)\quad F_\nu(y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{y^{\mu(\mu+\nu)}}{f_\mu(y) \cdot f_{\mu+\nu}(y)}.$$

Man finner enligt (14)

$$F_\nu(y) - F_{\nu-1}(y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{y^{\mu(\mu+\nu)}}{f_\mu f_{\mu+\nu}} - \frac{y^{\mu(\mu+\nu-1)}}{f_\mu f_{\mu+\nu-1}} \right)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{y^{\mu(\mu+\nu)} - y^{\mu(\mu+\nu-1)} + y^{\mu(\mu+\nu)+\nu}}{f_\mu f_{\mu+\nu}}$$

$$= \frac{y^\nu}{f_\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{y^{(\mu+1)(\mu+\nu)} - y^{\mu(\mu+\nu-1)}(1-y^\mu)(1-y^{\mu+\nu})}{f_\mu f_{\mu+\nu}}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{y^{(\mu+1)(\mu+\nu)}}{f_\mu f_{\mu+\nu}} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{y^{\mu(\mu+\nu-1)}}{f_{\mu-1} f_{\mu+\nu-1}} = 0.$$

Således är

$$F_\nu(y) = \frac{1}{f_\nu} + \frac{y^{\nu+1}}{f_1 f_{\nu+1}} + \frac{y^{2\nu+4}}{f_2 f_{\nu+2}} + \ldots.$$

oberoende av ν. Men om ν obegränsat växer, så övergår $F_\nu(y)$ till

$$F_\infty(y) = \frac{1}{f_\infty} + \frac{y^\infty}{f_1 f_\infty} + \ldots = \frac{1}{f_\infty}.$$

Alltså måste

$$F_\nu(y) = \frac{1}{f_\infty(y)};\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Under förutsättning (12) ger således (11) och (13)

$$C(y, z_1, z_2) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (z_1{}^\nu + z_2{}^\nu) \cdot y^{\binom{\nu}{2}};\ z_1 \cdot z_2 = y. \tag{16}$$

För $y = x^n$, $z_1 = x^\alpha$, $z_2 = x^{n-\alpha}$ får man härur

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty} (1 - x^{n\sigma}) \cdot \prod_{\sigma=0}^{\infty} (1 - x^{n\sigma+\alpha}) \cdot \prod_{\sigma=0}^{\infty} (1 - x^{n\sigma+n-\alpha}) = \tag{17}$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu x^{\frac{n\nu^2-(n-2\alpha)\nu}{2}}.$$

Ur denna *polygonaltalsats* erhålles *pentagonaltalsatsen* (1) som specialfall för $n = 3$, $\alpha = 1$.

Strålbegränsning i kikare.

C. BERGHOLM.

Då man i skolan behandlar de optiska instrumenten, tager man vanligen ingen hänsyn till strålknippets begränsning genom bländare och linsinfattningar. Strålbegränsningen spelar dock en mycket viktig roll, och utan en klar föreställning om de grundläggande begreppen för strålbegränsning blir kännedomen om instrumenten ofullständig.

Vi betrakta först strålbegränsningen i en keplerkikare. Denna består som bekant av två positiva linssystem, objektivet och okularet. Objektivet ger en reell bild av objektet (= föremålet) i ett plan, som i det närmaste sammanfaller med okularets främre fokalplan. I detta bildplan införes

en verklig bländare d. v. s. ett bleck med ett cirkelrunt hål, vars medelpunkt sammanfaller med det optiska systemets axel. Denna bländare kallas kikarens synfältsbländare (fig. 1). Att denna bestämmer synfältets storlek framgår därav, att den bild — inträdesluckan — som objektivet ger av synfältsbländaren, sammanfaller med objektet och bestämmer alltså den del av objektet, som kan sända strålar genom syn-

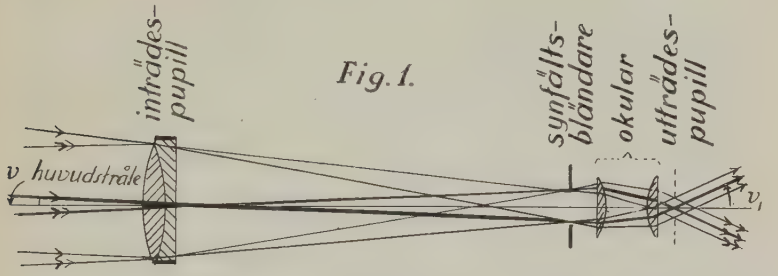


Fig. 1.

fältsbländaren. Av denna anledning blir synfältet i en keplerkikare skarpt begränsat.

Även objektivets och okularets infattningar verka som bländare. Konstruerar man de bilder, som objektivet ger av dessa bländare, kallas den av dessa bilder, som synes under den minsta synvinkeln från en punkt på objektet, kikarens inträdespupill. Den har fått sitt namn därav, att den spelar samma roll för kikaren som pupillen för ögat. Inträdespupillen är alltså den bländare, som kraftigast avbländar de från objektet kommande strålkonerna. I en keplerkikare är vanligen objektivets infattning inträdespupill för hela det optiska systemet bestående av kikaren och ögat. I en del fall är den bild, som kikaren ger av ögats pupill, mindre än objektivets infattning, och då verkar bilden av pupillen som inträdespupill för kikaren.

Alla strålar, som genom inträdespupillen komma in i kikaren, måste lämna kikaren genom den bild, som kikaren ger av inträdespupillen. Denna bild kallas kikarens utträdespupill. Är objektivets infattning inträdespupill, blir

alltså utträdespupillen den bild, som okularet ger av objektivinfattningen. Då okularet kan betraktas som en enkel positiv lins, inser man, att utträdespupillen faller utanför kikaren strax bakom okularet på ett avstånd, som är något större än okularets fokaldistans. Man ser utträdespupillen — även kallad okularring — som en rund lysande skiva, om man riktar kikaren mot en ljus bakgrund och håller ögat några decimeter bakom okularet.

I en kikare, som är inställd för parallella strålar, är avståndet mellan objektivet och okularet lika med summan av objektivets fokaldistans f_1 och okularets f_2. Om objektivets fria diameter är D mm och utträdespupillens diameter d mm, blir

$$\frac{D}{d} = \frac{f_1}{f_2} = \text{kikarens förstoring.}$$

Varje stråle genom inträdespupillens mittpunkt kallas en huvudstråle. Alla huvudstrålar, som lämna kikaren måste, enligt definitionen på utträdespupill, gå genom den senares mittpunkt. Bildar en huvudstråle på objektsidan vinkeln v med det optiska systemets axel och på bildsidan vinkeln v_1, kallas förhållandet $tg\, v_1 : tg\, v$ kikarens förstoring. Detta förhållande är lika för alla huvudstrålar, vilket betyder, att förstoringen är konstant för alla de vinklar, som huvudstrålarna göra med axeln. Inträdes- och utträdespupillernas mittpunkter äro alltså ortoskopiska punkter, ett villkor, som måste vara uppfyllt för att bilden skall bliva likformig med objektet.

Vinkeln mellan de yttersta huvudstrålarna i ett meridianplan d. v. s. vinkeln mellan de linjer, som dragas i samma plan från inträdespupillens mittpunkt till inträdesluckans rand, kallas kikarens objektiva synfält. Vinkeln mellan de konjugerade huvudstrålarna efter genomgången av utträdespupillen bestämmer det subjektiva synfältet. Förhållandet mellan det subjektiva och objektiva synfältet är alltså enligt det föregående lika med kikarens förstoring.

Den ljusmängd, som från en objektpunkt inkommer i en kikare, är proportionell mot inträdespupillens yta. Bortser man från ljusförluster inuti kikaren, måste samma ljusmängd gå ut ur utträdespupillen som inkommit i kikaren. En kikares ljusstyrka är alltså proportionell mot kvadraten på utträdespupillens diameter. Man säger, att en kikare har »ljusstyrkan» 16, om utträdespupillens diameter är 4 mm. Kikare, som ha mindre ljusstyrka än 9, kallas ljussvaga. Överstiger ljusstyrkan 25 kan man kalla instrumentet för en »nattkikare».

Av det sagda torde framgå vilket intimt samband som råder mellan en kikares förstoring, synfält, ljusstyrka och storlek. Med hänsyn till de korrektioner beträffande sfärisk- och kromatisk abberation som objektivet måste uppfylla, bör objektivets öppningsförhållande högst vara $\frac{1}{6}$ d. v. s. fokaldistansen är 6 gånger större än objektivdiametern. Önskar man alltså en keplerkikare med 10 gångers förstoring och ljusstyrkan 25, blir utträdespupillen 5 mm, objektivdiametern 50 mm, objektivets fokaldistans 300 mm, okularets fokaldistans 30 mm, kikarens längd 330 mm. Det subjektiva synfältet, som huvudsakligen beror på okularets konstruktion, är vanligen 40°. Det objektiva synfältet blir endast 4°.

Då en keplerkikare användes, är det av stor betydelse, att observatorn håller sitt öga, så att ögats pupill sammanfaller med utträdespupillen. Endast i detta fall får bilden naturlig klarhet och hela synfältet kan överblickas. För att denna placering av ögat skall kunna utföras enkelt och säkert är vid okularet fäst en ring av ebonit. Höjden hos denna ring är så avpassad, att ögats pupill sammanfaller med utträdespupillen, när ringens rand pressas mot ögonbrynet och kinden.

Är ögats pupill lika stor som utträdespupillen, komma alla strålar, som gått genom kikaren, in i ögat. Ljusmängden, som inkommer i ögat, då man ser genom en kikare med

t. ex. 10 gångers förstoring, är 100 gånger större än utan kikare, ty förhållandet mellan inträdespupillens yta och ögats pupill är lika med kvadraten på förstoringen. Bildens yta på ögats näthinna är naturligtvis 100 gånger större med än utan kikare. Då bildytan och ljusmängden växa i samma proportion, måste belysningen på näthinnan bli lika i båda fallen. Bildens klarhet i en kikare är alltså lika stor som med blotta ögat, om inga ljusförluster genom reflexion och absorption i instrumentet äga rum.

Är ögats pupill mindre än instrumentets utträdespupill, går endast en bråkdel av ljusmängden från utträdespupillen in i ögat, och bilden i kikaren synes mörkare än med blotta ögat. Från denna regel finns dock ett undantag. Är föremålet oändligt långt bort och punktformigt (t. ex. en stjärna), blir bilden på näthinnan punktformig, även när man betraktar stjärnan genom kikaren. Ljusmängden som inkommer i ögat, då man använder kikaren, är lika många gånger större än då man betraktar den med blotta ögat som inträdespupillens yta är större än ögonpupillens. Ljusmängden per ytenhet av bilden växer alltså avsevärt. Detta är orsaken till att man ser flera stjärnor med än utan kikare. Ju större den astronomiska kikarens objektivdiameter är, desto ljussvagare stjärnor kan man upptäcka med densamma.

Av prismakikare finnas en mängd olika konstruktioner. Det gemensamma för dem alla är att objektivet och okularet äro positiva linser, mellan vilka man infört en eller flera prismor, som ha till uppgift att förkorta kikaren och rättvända bilden. Strålbegränsningen är lika med den hos en keplerkikare.

I den holländska kikaren (teaterkikaren) utgöres objektivet av en positiv lins och okularet av en negativ. Det för linserna gemensamma bildplanet faller utanför okularet, och därför kan man aldrig införa en synfältsbländare i en teaterkikare.

Liksom vid en keplerkikare är vanligen objektivets infattning teaterkikarens inträdespupill och den bild, som okularet

ger av objektivet, är kikarens utträdespupill. Då okularet är en negativ lins, blir bilden av objektivinfattning virtuell. Den kommer alltså att ligga inuti kikaren strax framför okularet. Då ögat måste hållas bakom okularet, kan man aldrig få ögats pupill att sammanfalla med utträdespupillen. Betrakta vi figur 2, se vi, att det subjektiva synfältet måste bero på ögonpupillens storlek och avstånd från utträdespupillen. Har det utgående strålknippet den lutning, som figuren visar, inkommer hela strålknippet nätt och jämt i

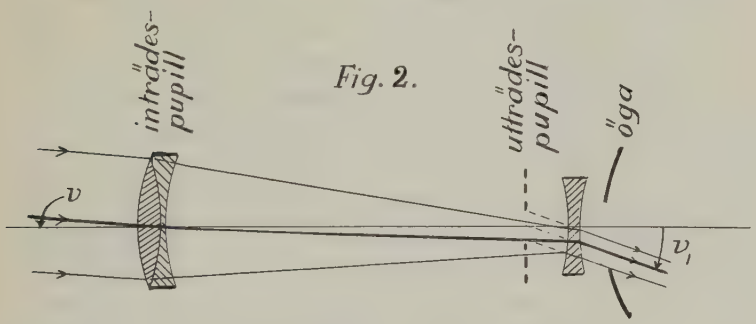


Fig. 2.

ögat. Allteftersom lutningen ökas, blir den bråkdel av ljusknippet, som inkommer i ögat, allt mindre och mindre. Härav inser man, att synfältet i en teaterkikare icke är skarpt begränsat. Klarheten är störst i ett område kring axeln och avtager sedan kontinuerligt mot synfältets rand. Då diametern i ögats pupill vid dagsljus är ungefär 2 mm och i skymningen kan uppgå till 8 mm, är det tydligt, att synfältet i en teaterkikare är störst, när belysningen är svag. Utträdespupillen hos en teaterkikare är vanligen mycket stor. Dess diameter kan uppgå till 20 mm. En teaterkikare har således mycket stor ljusstyrka.

Med ledning av det föregående kunna vi jämföra de olika kikarnas egenskaper med varandra. En keplerkikare har fyra mycket goda egenskaper. Dess synfält kan ökas oberoende av utträdespupillens storlek. Synfältet är skarpt begränsat och lika klart ända ut till randen. På synfältsblän-

daren inuti instrumentet kan man anbringa ett hårkors eller märken, som synas skarpt samtidigt med bilden och giva intryck av att sammanfalla med föremålet. Keplerkikaren är därför särskilt lämplig, då det är fråga om att utföra mätningar. Kikarens förstoring kan göras mycket stor utan att synfältet blir alltför litet. Samtidigt med dessa goda egenskaper har keplerkikaren två mindre goda. Dess längd växer hastigt med ökad förstoring. Bilden är upp och nedvänd och höger och vänster äro omkastade.

I den holländska kikaren, som saknar reellt bildplan, kan man icke införa ett hårkors, som synes samtidigt med bilden av föremålet. Kikaren är därför oduglig som mätinstrument. Synfältet är jämförelsevis litet och minskas hastigt med ökad förstoring. Man tillverkar aldrig teaterkikare med större än 6 gångers förstoring. Dessa olägenheter hos den holländska kikaren uppvägas av flera fördelar. Den ger en rättvänd bild. Dess längd är liten. Den är enkelt byggd, lätt och billig. Då den endast består av två linser, bliva ljusförlusterna genom reflexioner endast 15 procent. I en vanlig Zeisskikare med två prismor uppgår ljusförlusten till omkring 38 procent. Teaterkikaren ger mycket klara bilder i synnerhet i synfältets mitt, och den är lämplig för observationer i svag belysning. På grund av att utträdespupillen är mycket stor, kunna två enkelkikare fast förenas med varandra till en dubbelkikare, där båda okularen förskjutas samtidigt. Andra slag av dubbelkikare måste förses med en led, så att avståndet mellan de båda enkelkikarnas utträdespupiller kan göras lika med observatörens ögonavstånd.

Isoperimetriska produkters maxima.

Om $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \,.\, A$, där a_ν äro positiva tal, så är

$$a_1 \,.\, a_2 \ldots a_n \leqq A^n \qquad (1)$$

och likhetstecknet gäller endast för det fall att samtliga a_ν äro lika.

Som en omedelbar följd av olikheten $(a_1 - a_2)^2 \geqq 0$, som även kan skrivas $(a_1 + a_2)^2 \geqq 4a_1 a_2$ framgår, att satsen är sann för $n = 2$. Den gäller därför generellt, om dess giltighet för $n + 1$ tal kan bevisas vara en följd av dess giltighet för n tal.

Vi antaga

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} = (n + 1)\, B. \qquad (2)$$

Följande två fall kunna inträffa:

1. Samtliga $b_\nu = B$; då är $b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{n+1} = B^{n+1}$.
2. Icke samtliga $b_\nu = B$; då måste det bland talen b_ν finnas åtminstone ett tal, som är mindre än B och åtminstone ett tal, som är större än B.

Vi antaga att $b_n < B$ och att $b_{n+1} > B$ och skriva ekv. (2) under formen

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + (b_n + b_{n+1} - B) = n \,.\, B$$

och erhålla som en följd av (1)

$$b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{n-1}(b_n + b_{n+1} - B) \leqq B^n. \qquad (3)$$

Enär såväl $B - b_n$ som $b_{n+1} - B$ är positiv, gäller olikheten

$$(B - b_n)(b_{n+1} - B) > 0$$

eller

$$b_n + b_{n+1} - B > \frac{b_n \,.\, b_{n+1}}{B}.$$

Efter insättning i (3) erhålles

$$b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{n-1} \,.\, \frac{b_n \,.\, b_{n+1}}{B} < B^n$$

och slutligen

$$b_1 \,.\, b_2 \ldots b_{n+1} < B^{n+1}.$$

Bengt Åkerberg.

Problemet om isoperimetriska produkters maxima har i denna tidskrift tidigare behandlats för $n = 2$, 3 och 4 av K. L. Hagström, Årg. *10*, sid. 1.

Red.

Om ett bevis för en stereometrisk sats.

För ett konvext hörn gäller, att summan av sidorna är mindre än 360°. Denna sats brukar ingå i realgymnasiets kurs. Det klassiska beviset stöder sig därpå att i ett trekantigt hörn två sidor tillsammans äro större än den tredje, en sats som även för sin egen skull kunde vara värd att medtagas. Emellertid inläres i skolorna på sina håll ett annat bevis. Varifrån detta ursprungligen kommer vet jag ej. Det förekommer i en (eller flera?) av de använda läroböckerna. Senast i våras kunde jag vid ett par skolor konstatera, att det är i bruk. Jag ville därför fästa uppmärksamheten på dess bristfällighet.

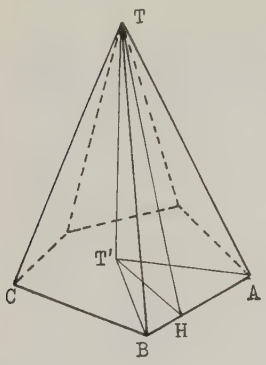


Fig. 1.

Det konvexa hörnet med toppen T skäres med ett plan så, att projektionen T' av T på detta plan faller i det inre av den konvexa snittpolygonen $ABC\ldots$ Då är summan av sidornas projektioner (se fig. 1)

$$\sphericalangle AT'B + \sphericalangle BT'C + \ldots = 360°,$$

och satsen kan därför även formuleras

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BTC + \ldots < \sphericalangle AT'B + \\ + \sphericalangle BT'C + \ldots \qquad (1)$$

Den tanke, som legat till grund för det här åsyftade beviset, är nu den, att olikheten (1) kan erhållas genom addition av olikheterna

$$\sphericalangle ATB < \sphericalangle AT'B \\ \sphericalangle BTC < \sphericalangle BT'C \qquad (2)$$

— — — — — —

Men relationerna (2) innebära vida mera än relationen (1). Beviset skall gälla för ett godtyckligt konvext hörn. Det skall också gälla för ett godtyckligt snitt, ty något urval i det avseendet är inte gjort. Men då innebära relationerna (2) helt enkelt, att en vinkel, vars båda ben råka ett plan, alltid är mindre än vinkelns projektion på planet. *Detta är emellertid icke riktigt:* vinkeln kan efter omständigheterna vara $>$ eller $=$ eller $<$ sin projektion.

Betrakta i fig. 1 vinkeln ATB och dess projektion $AT'B$. Perpendiklarna från T och T' mot AB ha den gemensamma fotpunkten H. I de rätvinkliga trianglarna AHT, AHT' är $HT > HT'$

och alltså $\angle ATH < \angle AT'H$. Motsvarande gäller om vinklarna BTH, $BT'H$ och därför om *summorna:* $\angle ATB < \angle AT'B$. Det är på detta sätt som relationerna (2) bevisas. Mot olikheterna $\angle ATH < \angle AT'H$, $\angle BTH < \angle BT'H$ är intet att anmärka, de äro alltid giltiga. Däremot gäller likheten $\angle ATB = \angle ATH + \angle BTH$ endast om H ligger mellan A och B. Ligger H på förlängningen av AB, t. ex. åt B till, så är $\angle ATB = \angle ATH - \angle BTH$. *Beviset* är då ej längre riktigt helt enkelt därför att ur $a < a'$, $b < b'$ ej följer $a - b < a' - b'$; *slutsatsen* $\angle ATB < \angle AT'B$ är icke heller alltid riktig som nedan skall visas. Vad som bevisats är, att om perpendikeln från T mot AB har sin fotpunkt mellan A och B, så är $\angle ATB$ alltid mindre än sin projektion på ett plan v. s. h. genom AB. Alltså äro relationerna (2) bevisade (och därmed även den här åsyftade stereometriska satsen) för det fall, att perpendiklarna från T' mot snittpolygonens sidor ha sina fotpunkter på dessa sidor, sålunda för ingen sida på dess förlängning.

För att jämföra vinklarna ATB, $AT'B$ i det fall att fotpunkten H ligger på AB:s förlängning observera vi, att planet $TT'H$ är normalplan till AB. Om vi vrida endera av planen ATB, $AT'B$ kring AB så, att de båda planen sammanfalla, så få vi fig. 2: T' får läget P, T läget Q, PQ är normal till AB och $HQ > HP$.

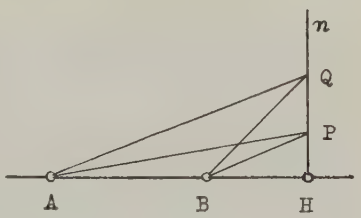


Fig. 2.

Utgå vi omvänt från tvenne punkter P och Q, som uppfylla dessa båda villkor, så kunna vi välja $P = T'$ och på normalen till planet ABT' genom T' finna en punkt T med $HT = HQ$; da är $\angle ATB = \angle AQB$ och $\angle APB = \angle AT'B$ är projektionen av $\angle ATB = \angle AQB$. Den fråga, som skall besvaras, är alltså den huruvida $\angle AQB$ är $>$ eller $=$ eller $< \angle APB$. Vi ha därför endast att undersöka, hur en vinkel ASB varierar, då dess spets S beskriver en normal n till AB (i ett fixt plan genom AB). Då orten för spetsen S i en konstant vinkel ASB (belägen på ena sidan om räta linjen AB) är en cirkelbåge genom A, B, så ha vi endast att betrakta knippet av cirkelbågar genom A och B samt dessas skärningspunkter med n. Man ser att, då punkten S beskriver n utifrån H, så växer $\angle ASB$ från 0 till ett visst maximumvärde $\alpha = \angle AS_*B$, bestämt av den båge i knippet, som tangerar n, avtager därpå asymptotiskt mot 0. Om punkterna S_1 och S_2 ligga på samma cirkelbåge genom A och B, så antar $\angle ASB$ samma värde för S i S_1 och i S_2, ett större värde än detta för S mellan S_1 och S_2,

ett mindre värde utanför sträckan S_1S_2. Låt nu P och Q vara de förut nämnda punkterna på n; då är $HQ > HP$. Om P ligger å andra sidan om S_* från H räknat, så är alltid $\sphericalangle AQB < \sphericalangle APB$. Ligger P å samma sida om S_* som H, så kunna vi antaga $P = S_1$. Om då Q ligger mellan S_1 och S_2, så är $\sphericalangle AQB > \sphericalangle APB$, ligger Q å andra sidan S_2, så är $\sphericalangle AQB < \sphericalangle APB$. Om vi, som ovan nämnts, välja $T' = P$ och genom T' lägga normalen till planet ABT', så kunna vi finna en punkt $\overline{T}$ på denna normal, bestämd av

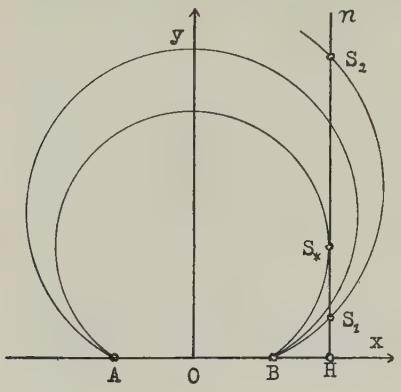


Fig. 3.

$$H\overline{T} \,.\, HT' = HA \,.\, HB,$$

med den egenskapen att för varje punkt T mellan T' och $\overline{T}$ är

$$\sphericalangle ATB > \sphericalangle AT'B.$$

Det kan sålunda inträffa att i en eller flera av relationerna (2) det riktiga tecknet är $>$ i st. f. $<$.

Låta vi nu H beskriva AB:s förlängning, så är orten för S_* den liksidiga hyperbel, som har AB till transversalaxel, vilket framgår därav att

$$y^2 = (HS_*)^2 = HA \,.\, HB = (x + AO)(x - AO).$$

Därför kan det föregående formuleras på följande sätt. Konstruera i planet ABT' den liksidiga hyperbel, som har AB till transversalaxel. Om T' ligger utanför hyperbeln, så är $\sphericalangle ATB < \sphericalangle AT'B$, var punkten T än väljes på planets normal genom T'. Ligger T' däremot i det inre av hyperbeln, så finnes på normalen en punkt $\overline{T}$ så, att för T mellan T' och $\overline{T}$ är $\sphericalangle ATB > \sphericalangle AT'B$. Relationerna (2) förbli sålunda riktiga även i det fall att T' ligger utanför var och en av de liksidiga hyperbler, som konstrueras med snittpolygonens sidor som transversalaxlar. Ligger T' i det inre av någon av dessa hyperbler, så kan motsvarande relation (2) upphöra att gälla; sådana punkter T' finnas alltid i det inre av snittpolygonen, försåvida denna innehåller någon trubbig vinkel. Då vinkelsumman i en konvex n-hörning är $(n-2)\,180° = (2n-4)\,90° > n \,.\, 90°$, om $n > 4$, så finnes åtminstone en trubbig vinkel, om polygonen har mera än 4 sidor. Detsamma gäller för en fyr-

hörning, såvida den inte är en rektangel. Härav följer då, att, om den konvexa polygonen inte är en spetsvinklig eller en rätvinklig triangel eller en rektangel, så finnes det punkter T, vilkas projektioner T' på polygonens plan falla i det inre av polygonen, och för vilka i åtminstone en av relationerna (2) det riktiga tecknet är $>$ i st. f. $<$.

Fritz Carlson.

Några förslag till enskilt arbete i matematik å gymnasiet.

Av **ARVID UHLER.**

För en kort tid sedan utkom ett arbete, J. Westerlin, Det enskilda arbetet i gymnasiet. Några förslag ha där också utformats för matematiken, omfattande matematikens historia, statistik, ekvationsteori samt dessutom ett tillägg, angivande litteratur för ytterligare ett par områden. Någon invändning mot det föreslagna har jag ej, tvärtom synes mig förslagen värdefulla. För att tillfredsställa elevernas skiftande intressen kan det dock vara påkallat att vidga kretsen av lämpliga uppgifter.

Den största svårigheten vid det enskilda arbetets planläggning hänför sig till bristen på lämplig litteratur. I några fall ha speciella böcker utgivits med direkt tanke på det enskilda arbetet. Det är att hoppas, att detta så småningom skall ske i ännu större utsträckning. Å andra sidan får man ej förbise det värdefulla i att eleven lär sig att hitta tillrätta även i litteratur, som ej är direkt skriven för ändamålet, ehuru vederbörande handledare därvid får iakttaga en viss försiktighet, så att eleven erhåller nödig hjälp. Det kan också ifrågasättas, om det icke är en fördel, att boken är skriven på annat språk än det svenska. För en elev, som vid fortsatta studier kommer att huvudsakligen vara hänvisad till facklitteratur å främmande språk, bör det vara nyttigt att redan å skolstadiet erhålla någon vana i dess begagnande.

Men därav följer, att kostnaderna för bokanskaffning för den enskilde lärjungen skulle kunna ställa sig väl dryga. Enligt min mening är det ofrånkomligt, att böcker tillhandahållas lånevägen. Det bästa synes mig därför vara, att lärjungebiblioteken så småningom förses med det nödvändiga härvidlag.

De förslag, som jag här framlägger, göra ingalunda anspråk, på att uttömma ämnet. Den ovannämnda svårigheten att finna

lämplig litteratur har tvingat mig att utesluta vissa eljest önskvärda områden. Så upptager jag t. ex. ej sannolikhetsräkning med användningar.[1] Jag bör också tillägga, att jag ej varit i tillfälle att i praktiken pröva alla uppgifterna. Den ständiga förändringen av matematikkurserna de sista åren medför också en viss osäkerhet angående elevernas förutsättningar. Det är därför möjligt, att de föreslagna uppgifterna böra minskas till omfånget.

Förslagen gälla i första hand specialkursen å reallinjen. För elever å latingymnasiet och å allmänna kursen av reallinjen ställer det sig naturligt att välja kursmoment från reallinjen resp. specialkursen.

Geometri. Konstruktionsuppgifter med passare och linjal.

En lämplig uppgift i näst högsta ringen är att låta eleven taga del av metoder för geometrisk konstruktion. C. E. Sjöstedt: Geometriska övningsuppgifter och lösningsmetoder (pris 2 kr.) är utgiven med tanke härpå. Senare delen härav upptager till behandling några av de viktigaste metoderna. Lämpligt kan också vara, att eleven får koncentrera sig på en viss uppgift t. ex. Apollonios' tangeringsproblem.[2]

Inversion. En lämplig framställning av teorien för reciproka radier finner man i A. Adler: Theorie der geometrischen Konstruktionen § 6. Däri ingår också övningsexempel och även lösning av Apollonios' beröringsproblem enligt denna metod. (Näst högsta ringen.)

Kubens fördubbling och vinkelns tredelning. För studiet av dessa klassiska problem hänvisas åter till A. Adler: Theorie der geom. Konstr. Först inhämtas §§ 36 och 37, som innehålla villkor för att ett geometriskt problem skall kunna lösas med passare och linjal. Därefter studeras §§ 15 och 46, vari påvisas omöjligheten av problemens lösning med passare och linjal samt angivas lösningar av problemen under användning av andra hjälpmedel.[3]

Som annan lämplig litteratur för dessa uppgifter må anföras J. Hjelmslev: Geometriske Eksperimenter (pris 6:50). Denna intressanta bok innehåller konstruktionsmetoder, byggande på hjälp-

[1] Nyligen har C. F. Lundahl påbörjat utgivandet av en serie på Natur och Kultur, avsedd för arbeten på detta område.

[2] Om intet annat nämnes föreslås att redovisning sker genom förhör eller skrivligt prov, ådagaläggande färdighet att lösa övningsuppgifter.

[3] Sedan detta skrivits har J. Tandberg i denna tidskrifts årg. 18: 2 publicerat en uppsats om vinkelns tredelning.

medel, som i själva verket äro lika enkla som användning av passare och linjal och med vilka författaren kan nå lösningar av alla problem av algebraisk natur och även vissa transcendenta. Ett urval göres för att studera ovannämnda problem.

Denna bok innehåller dessutom många andra problem, som kan locka en elev med intresse för uppgifter av denna art. Uppgiften gives i högsta ringen och kan eventuellt redovisas genom föredrag i klassen.

Cirkelns kvadratur. Liksom föregående problem kan detta berömda problem studeras i Adlers ovannämnda bok, kap. IX. Först meddelas problemets historia och omnämnes det slutgiltiga beviset för dess olösbarhet. Det är naturligtvis omöjligt att på detta elementära stadium närmare ingå på detsamma. Därpå följa approximativa metoder. Som komplement kan studeras den intressanta framställningen i Hjelmslevs ovannämnda bok (sid. 76—87). Uppgiften är avsedd för högsta eller möjligen näst högsta ringen och redovisas genom föredrag i klassen.

Regelbundna månghörningars konstruktion. Litteratur: Adlers ovannämnda bok §§ 36 och 37 samt kap. VII. Eleven inhämtar först §§ 36 och 37, innehållande möjlighetsvillkoren för ett geometriskt problems lösning med passare och linjal. Han undersöker sedan vilka månghörningar, som kunna konstrueras, och tar del av konstruktionsmetoder. Slutligen får han upplysningsvis taga del av Gauss' sats. Framställningen bygger på Moivres' teorem. Eleven måste alltså som förstudier inhämta elementen av de komplexa talens teori. För konstruktion av 17-hörningen hänvisas även till en uppsats i denna tidskrift årg. 14: Den regelbundna sjuttonhörningen av A. Wahlgren. (Högsta eller möjligen näst högsta ringen.)

Icke euklidisk geometri. Denna uppgift bör endast anförtros åt elever, som visat sådan begåvning, att de böra erhålla krävande enskilda arbeten. För dessa tror jag emellertid, att uppgiften bör te sig intresseväckande (då jag en gång gav uppgiften, blev resultatet mycket gott). Först studeras problemets historik och de olika hypoteser, som leda till hyperbolsk, parabolsk och elliptisk geometri, belysas. Därefter får eleven mera ingående fördjupa sig i den hyperbolska geometrien. Som lämplig litteratur föreslås: Sommerville, Non-euclidean geometry (sid. 1—56). (Näst högsta eller högsta ringen.)

Projektiv geometri. Liksom föregående uppgift ställer denna mycket stora krav på eleven och kan därför endast i undantagsfall givas som enskilt arbete. För att eleven skall ha behållning av uppgiften, måste han nämligen tränga relativt djupt in i ämnet. Hur långt man skall gå är ett spörsmål, som får bero på elevens intresse och förmåga att tillgodogöra sig teorien.

Ett för ändamålet lämpligt arbete har utgivits av C. E. Sjöstedt: Projektiv geometri. (Högsta ringen.)

Ekvationsteori. Samtliga uppgifter, som föreslås på detta område böra börja med inhämtandet av elementen av de komplexa talens teori. Sedan kunna uppgifterna utformas olika:

a) Ekvationers transformering och studium av tredje- och fjärdegradsekvationen (näst högsta ringen).

b) Metoder för bestämning av gränser för och antal av rötter till en godtycklig algebraisk ekvation, metod för att finna multipla rötter jämte någon grafisk metod för att finna reella rötter (näst högsta ringen).

c) Newtons metod för approximativ beräkning av rötter. (Högsta ringen, helst som fortsatt uppgift för den som i näst högsta ringen valt alternativ b).

Som lämplig litteratur rekommenderas: C. F. Lundahl, Ekvationsteori; I. Todhunter, Theory of equations; Dickson, First course in the theory of equations.

Determinantteori. Då denna uppgift ej kräver så stora förkunskaper, är den lämplig i näst högsta ringen. Eleven skaffar sig säkerhet i beräkning av determinanter och enkla räknelagar för desamma. Tillämpning sker på lineära ekvationssystem. Som lämplig litteratur föreslås: Dicksons nyss omnämnda bok.

Nomografi. Litteratur: C. Runge, Graphical methods (sid. 1—25, 40—58). Här framställes, hur man genom teckning kan utföra de fyra räknesätten, beräkning av värdet för en hel rationell funktion av en variabel och även allmännare för en rationell funktion och i samband därmed enkla metoder att approximativt bestämma rötterna till en ekvation av godtyckligt gradtal. Därpå följer representation av en funktion på en skala och i samband därmed teorien för räknestickan, användning av rutat papper med olikformig skala längs båda koordinataxlarna. Eleven bör själv göra sig tillämpningsuppgifter. Särskild uppmärksamhet bör ägnas räknestickan, i vars användning han bör skaffa sig säkerhet. Likaledes bör han

ha tillgängligt rutat papper med logaritmisk skala och med exempel visa dess användning (näst högsta ringen).

Plan trigonometri: *Solvering av fyrhörningar.* Undersökningen bör ge till resultat de lämpligaste metoderna för solvering av fyrhörningar med tillräckligt antal givna element (vinklar, sidor och diagonaler). Därefter behandlas samma uppgift för fyrhörningar, bundna av ett villkor: parallelltrapets, cirkeltrapets och fyrhörningar, omskrivna kring en cirkel (radien kan ingå som känt element). Uppgiften föreslås för näst högsta ringen, men kan ej påbörjas förrän ett stycke in på läsåret, då trianglars solvering behandlats. (Skriftlig redogörelse.)

Sfärisk trigonometri. Studiet av den sfäriska trigonometriens grundformler rekommenderas särskilt för de elever, som äro intresserade av astronomi. Litteratur: F. Iversen, Lärobok i sfärisk trigonometri. (Högsta ringen).

Analytisk geometri: *Studium av Apollonios' böcker.* Som bekant har A. Wahlgren översatt Apollonios' tre första böcker till modernt matematiskt språk och har därigenom givit den för enskilt arbete användbara litteraturen ett värdefullt tillskott. Då utgivaren själv i företalet utformat uppgifter, hänvisas till dessa.

Den generella andragradsekvationens geometriska betydelse. De vanliga läroböckerna i analytisk geometri upptaga i regel en behandling av detta problem, så att eleverna kunna hänvisas till dessa för sitt arbete. (Högsta ringen).

Analytisk rymdgeometri. Sedan de rymdgeometriska begreppen genomgåtts i klassen, kan det vara av intresse för en elev att inhämta elementen av en analytisk behandling av rymdgeometrien. Det kan här endast vara fråga om det enklaste: rymdkoordinater, räta linjens och planets ekvationer, skärningar och vinklar mellan linjer och plan samt beräkning av avstånd. Litteratur: Lindelöf, Lärobok i analytisk geometri; R. Haussner, Analytische Geometrie des Raumes. (Sammlung Göschen pris 2: 80). (Högsta ringen).

Differential- och integralkalkyl. Litteratur: Läroböcker, som användas vid universitet och högskolor, ur vilka handledaren väljer lämpliga partier. Dessutom kan nämnas, att K. A. Wingärdh i Falu h. a. läroverks årsredogörelse utgivit: »Utvidgad

kurs i differential- och integralkalkyl» och »Integralkalkylens tillämpningar på beräkning av ytor och båglängder samt grunderna av läran om differentialekvationer». (Pris 50 öre pr. st.)

Derivator samt serieutvecklingar. Talet e studeras och derivatan för e och log x härledas. Eleven gör sig bekant med logaritmisk derivering. Därefter genomgås Rolles teorem, medelvärdssatsen och Taylors teorem. Tillämpning härav sker på e^x, sin x och cos x, där resttermen visas gå mot noll. Moivres teorem härledes. (Högsta ringen).

Kurvor av högre ordning. Avsikten med denna uppgift är att fördjupa det som genomgås i skolan. En allmän metod att uppsöka asymptoter bör ingå. Övningsuppgifter angivas av handledaren, som kontrollerar, att de ej äro för svåra. Om kurvorna överhuvud skola ha singulära punkter, måste dessa vara av mycket enkel natur. För angivande av en lämplig omfattning av uppgiften kan hänvisas till J. Malmquist, Föreläsningar i matematik (sid. 86—106). (Högsta ringen).

Kurvors krökning. Krökningscirkeln och dess ekvation härledes. Speciell tillämpning sker på kägelsnitten, där orten för krökningscentrum deduceras och uppritas. (Högsta ringen).

Integralkalkyl. a) Först studeras talet e samt derivatan för e^x och log x. Indefinita integraler definieras och enkla integralformler härledas i direkt anknytning till derivationsformlerna. Likaså genomgås substitution och partiell integration. Därefter uppdelas rationella funktioner i partialbråk, där dock endast sådana funktioner medtagas, vilkas nämnare kunna uppdelas i reella förstagradsfaktorer. Genom övningsexempel inhämtas säkerhet i utförande av integrationer. Tillämpning sker dessutom på beräkning av ytor och volymer, med eller utan införande av begreppet definit integral. (Högsta eller möjligen näst högsta ringen; se nedan å c).

b) Huvudvikten lägges på den definitiva integralen, vars samband med den indefinita integralen klargöres. Integrationsregler studeras endast för sådana funktioner, som ej leda till logaritm- eller exponentialfunktioner. Tillämpning sker på ytor och volymer. Eventuellt kunna även genomgås approximativa metoder för beräkning av integraler: trapetsmetoden och Simpsons regel. (Högsta ringen).

c) För den elev, som i näst högsta ringen valt integralkalkyl som enskilt arbete (se ovan a), kan det vara lämpligt, såvida han

även i högsta ringen väljer matematik, att få i uppgift att tillägna sig lösningsmetoder för enkla differentialekvationer. Uppgiften kan lämpligen omfatta ekvationer med separabla variabler samt homogena, lineära ekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter. Även bör däri ingå den icke homogena differentialekvation, ur vilken Ohms lag för växelström deduceras.

Litteratur: Carleman, Lärobok i differential- och integralkalkyl; Lunds matematiska sällskaps kompendier N:r 2 (Pris 3 kr.).

Aritmetiska serier av högre ordning. Först studeras Hj. Olsson, Algebra sid. 140. Eleven bildar sedan själv serier, vars allmänna term är polynom, och bestämmer summan av n termer enligt sålunda inhämtad metod. Därefter tar han itu med den allmänna uppgiften att summera

$$\sum_{s=1}^{s=n-1} p \cdot s^{p-1}$$

och sätter denna summa lika med

$$A_0 n^q + A_1 n^{q-1} + \ldots . + A_q = B_q(n).$$

Han erhåller därur

$$p\, n^{p-1} = A_0\left[(n+1)^q - n^q\right] + A_1\left[(n+1)^{q-1} - n^{q-1}\right] + \ldots .$$

och inser att $q = p$. Binomialteoremet tillämpas för utveckling av $(n+1)^s$ och termerna ordnas efter digniteter av n. Genom identifiering av de båda membra fås ekvationssystem, ur vilka A_ν kunna successivt beräknas. Sättes $A_\nu = \binom{p}{\nu} B_\nu$, erhålles att B_ν ej bero av p. De Bernoulliska talen äro sålunda härledda och de tio första angivas numeriskt. Eleven får upplysningsvis veta, att dessa tal spela en stor roll i den matematiska analysen.

Uppgiften skisseras endast så mycket, som är nödvändigt, för att eleven skall få klart för sig, vad uppgiften gäller.

Dessutom kan eleven få försöka sig på uppgiften att summera $\sum_{s=0}^{s=n} (a + bs)\, x^s$. Han bör själv komma underfund med att han kan utgå från den geometriska serien, och sedan bör han lätt kunna angiva, hur summan kan bildas, om koefficienterna äro högre polynom av s. (Högsta ringen).

Lösning av en amorteringsuppgift.

Bland de matematiska studentuppgifterna för realgymnasiet innevarande höst (1935) förekom följande uppgift:

> Ett lån, på vilket 5 % årlig ränta på ränta beräknas, skall amorteras på 40 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Varje inbetalning utgör till en del ränta, till en del kapitalavbetalning å skulden. Vid vilken inbetalning inträffar det för första gången, att räntan blir mindre än kapitalavbetalningen?

Uppgiften löses enklast, om man först visar, att de årliga amorteringarna bilda en geometrisk serie, vilket t. ex. kan ske på följande sätt.

Betecknas lånet med 100, annuiteten med A, blir första årets amortering $A - 5$, som sättes $= a_1$. Vid andra årets början utgör alltså skulden $100 - a_1$, varför det andra årets amortering utgör $A - 0{,}05(100 - a_1) = a_1 \,.\, 1{,}05 = a_2$. Vid det tredje årets början utgör skulden $100 - a_1 - a_2$, varför amorteringen blir $A - 0{,}05(100 - a_1 - - a_2) = a_2 \,.\, 1{,}05 = a_1 \,.\, 1{,}05^2$ o. s. v. Det n:te årets amortering utgör $a_1 \,.\, 1{,}05^{n-1}$.

Eller generellt så:

Vid n:te årets början utgör skulden $100 - a_1 - a_2 - \ldots a_{n-1}$, varför detta års amortering (a_n) utgör

$$A - 0{,}05\,(100 - a_1 - a_2 - \ldots a_{n-1}) = A - 0{,}05(100 - a_1 - a_2 - \ldots a_{n-2}) + \\ + 0{,}05\, a_{n-1} = a_{n-1} \,.\, 1{,}05 = a_{n-2} \,.\, 1{,}05^2 = \ldots = a_1 \,.\, 1{,}05^{n-1}.$$

Då skulden skall vara slutbetald efter 40 år, måste den vid 40:e årets början vara $\frac{A}{1{,}05}$; detta belopp växer nämligen på ett år till A, som är annuiteten. Amorteringen utgör $A - 0{,}05 \,.\, \frac{A}{1{,}05}$ eller $\frac{A}{1{,}05}$, vilket även omedelbart inses.

Härav ekv.-systemet:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \,.\, 1{,}05^{39} &= \frac{A}{1{,}05} \\ a_1 \,.\, 1{,}05^{n-1} &= \frac{A}{2} \end{aligned}\right\}, \quad \text{varav} \quad 1{,}05^{n-1} = \frac{1{,}05^{40}}{2}$$

och $25 < n - 1 < 26$ samt svaret: 27:e inbetalningen.

Vi ha insett, att amorteringarna bilda en geometrisk serie, i vilken kvoten $= 1{,}05$ och sista termen $\frac{A}{1{,}05}$. Serien måste m. a. o. vara

$$\frac{A}{1{,}05^{40}};\ \frac{A}{1{,}05^{39}},\ \cdots \frac{A}{1{,}05}.$$

Frågan ställes därför enklast: Angiv ordningsnumret för den term i nämnda serie, från och med vilken termerna överstiga halva annuiteten $\left(\frac{A}{2}\right)$.

S. Bågman.

En not till Moll-Rudbergs elektricitetslära.

Härmed påpekas en på grund av förbiseende felaktig bevisföring i nämnda lärobok. På sid. 99 i 1934 års uppl. (sid. 118 i närmast föreg. uppl.) härledes först formeln

$$\frac{E}{E_0} = \sin\alpha \text{ eller } E = E_0 \,.\, \sin\alpha \qquad (1)$$

för en växelströmbanas momentana elektromotoriska kraft under förutsättning att vridningsvinkeln α ligger i första kvadranten. Därefter heter det: »Att denna formel är *generell* inses av följande: Då vridningsvinkeln α ligger mellan 90° och 180°, är motsvarande vinkel i triangeln KUM $180° - \alpha$, vars sinus är $\sin\alpha$; då vridningsvinkeln α ligger mellan 180° och 270° samt mellan 270° och 360°, äro motsvarande triangelvinklar resp. $\alpha - 180°$ och $360° - \alpha$, vilkas sinus är $-\sin\alpha$, eller m. a. o. *elektromotoriska kraften söker under detta halva varv driva ström åt motsatt håll mot förut*» (kursiverat av undertecknad).

Enligt läroboken gäller alltså formeln

$$\frac{E}{E_0} = -\sin\alpha \text{ eller } E = -E_0 \,.\, \sin\alpha, \qquad (2)$$

då α ligger mellan 180° och 360°. Men härav följer *icke*, att E och E_0 ha olika tecken. Tvärtom skulle slutsatsen bli, att de måste ha lika tecken, emedan sin α är negativ, då α är belägen i tredje eller fjärde kvadranten.

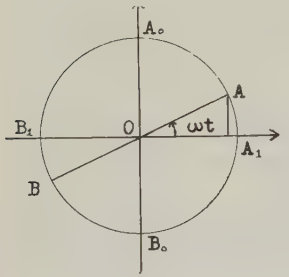
Den experimentella erfarenheten visar emellertid, att E för de båda sistnämnda vinkelområdena verkligen har motsatt tecken

mot E_0. Således är formeln (2) ej riktig. Man får i stället

$$\frac{-E}{E_0} = -\sin\alpha \text{ eller } E = E_0 . \sin\alpha$$

d. v. s. identiskt samma form som (1), vilken härmed bevisats vara generell.

Med hjälp av derivatbegreppet kan f. ö. härledningen göras mycket enklare på följande sätt, som ju ej är nytt men som jag på grund av egen erfarenhet vill rekommendera.



I vidstående figur föreställer AB den mot åskådaren vända sidan av en rektangulär slinga, som med konstant vinkelhastighet ω roterar kring sin genom O vinkelrätt mot teckningens plan gående ena symmetriaxel. Slingan befinner sig i ett homogent magnetiskt kraftfält, vars kraftlinjer äro likriktade med den positiva y-axeln.

Vid tiden $t_1 = 0$ intager slingan läget A_1B_1, vid tiden t läget AB; punkten A:s koordinater äro x och y. Det av slingan i läget AB omslutna kraftflödet är tydligen proportionellt mot AB:s projektion på x-axeln d. v. s. också mot abskissan x eller mot $\cos\omega t$, och den inducerade elektromotoriska kraften i ögonblicket t är proportionell mot flödets derivata med avseende på t d. v. s. mot $\sin\omega t$ eller mot ordinatan y. Den momentana elektromotoriska kraften E i slingan kan således skrivas

$$E = E_0 . \sin\omega t,$$

där E_0 föreställer E:s maximivärde, som nås i läget A_0B_0, medan elektromotoriska kraften är $= 0$ i läget A_1B_1.

Slutes ledningen genom ett induktionsfritt motstånd, erhålles för den momentana strömstyrkan I motsvarande formel

$$I = I_0 \sin\omega t,$$

där I_0 betecknar strömstyrkans maximivärde.

Under det första halvvarvet går den elektriska strömmen i riktningen BA, strömstyrkan växer från noll till I_0 och sjunker sedan åter ned till noll för att under nästa halvvarv med samma variationer gå i riktningen AB, allt i överensstämmelse med experimenten.

Gust. Forsström.

Rostads standardprov i räkning.

På den utställning, som i somras i samband med det Nordiska skolmötet i Stockholm hade ordnats i Adolf Fredriks folkskola, fanns ett rum, som huvudsakligen ägnats åt »Rostads standardprov i räkning». För dem som icke voro i tillfälle att se utställningen finns det möjlighet att sätta sig in i vad saken gäller genom att studera de uppsatser, som publicerats av lektor Fritz Wigfors och några hans medhjälpare i Rostads Elevförbunds årsskrifter samt i »Skola och Samhälle». Samtliga publikationer kunna av den intresserade anskaffas genom hänvändelse till Rostads Elevförbund, Kalmar.

Anledningen till att arbetet med utarbetandet av standardprov i räkning upptogs vid Kalmar seminarium (Rostad) var den varje höst vid inträdesprövningarna ånyo gjorda erfarenheten, att ett A i räkning från en skola ej sällan visade sig likvärdigt med ett Ba från en annan. Liknande erfarenheter gör varje lärare, som har med inträdesprövningarna vid de allmänna läroverken att göra.

Man kan tycka, att om en objektiv betygsgivning överhuvud taget skall vara möjlig, skall det vara just i matematik, där ju normerna för bedömningen kunna anges rätt klart. Ett försök att åstadkomma standardprov på detta område förefaller hur som helst välmotiverat.

På Rostad utarbetades nu ett antal dylika prov. De gällde dels mekanisk räknefärdighet — addition, subtraktion, multiplikation och division med hela tal — dels voro de s. k. problemprov, d. v. s. avsågo att pröva förmågan att reda sig med ett enkelt matematiskt problem. Dessa prov genomräknades därefter av ett mycket stort antal elever — inalles över 10 000 — på olika stadier inom folkskolan. På grundval av de därvid erhållna resultaten uppgjordes betygsskalor för de olika prestationerna på de olika åldersstadierna. De tabeller för betygssättning av de enskilda prestationerna och för bedömning av klassens allmänna ståndpunkt, som nu kunna erhållas från Rostad, ha alltså rent empiriskt underlag.

Om vederbörande lärare med hjälp av dessa prov och tabeller justerade sina betygskalor, kan det knappast vara något tvivel om att man icke skulle kunna uppnå en rätt enhetlig betygssättning i räkning i våra folkskolor. En absolut likformighet i bedömningen kan naturligtvis icke åstadkommas, ty, även om de olika klasserna utföra samma prov, arbeta de aldrig under precis lika omständig-

heter. I den ena klassen råder det en god stämning under provet, under det att stämningen i den andra klassen har blivit förstörd av någon ovidkommande omständighet. Den ena klassen har blivit klart och bestämt instruerad, i den andra har instruktionen förstörts av ideliga omsägningar och inströdda förmaningar att sitta stilla och höra på. Den ena läraren är intresserad, och hans entusiasm och tävlingsglädje smittar eleverna, den andre läraren kanske använder proven nödd och tvungen och utan tro på deras värde. Dylika omständigheter kunna särskilt spela en roll vid de s. k. problemproven. Det torde f. ö. aldrig kunna undvikas, att man bland dessa problem får med ett eller annat, som den ena eller andra klassen övats på förut. Härigenom övergår provet från att vara ett prov på förmåga att reda sig med ett matematiskt problem till att vara ett vanligt kunskapsprov.

Från den inträdesprövande lärarens synpunkt måste man kanske säga, att det man i första hand intresserar sig för icke är de prövades kunskapskvantitet, utan deras förmåga att tillgodogöra sig den undervisning de ha fått och komma att få. Man tager mycket hellre emot en elev, som är numro ett i sin klass, men undervisats av en tämligen litet drivande lärare, så att han, mätt med standardprovets måttstock, kanske icke förtjänar mer än B för sina kunskaper, än en, som av en duktig lärare tillsammans med flertalet i klassen drillats upp till AB-nivån.

Det bör framhållas att dessa standardprov ha ett mycket stort värde alldeles oavsett de tekniska och reella invändningar, som ovan riktats emot dem. En av deras starka sidor formulerar lektor Wigfors själv på följande sätt: »Proven äro en mätsticka i klasslärarens hand och ej i en kontrollerande myndighets.» Det betyder ganska mycket för den lärare som år efter år måste arbeta helt på egen hand, att på detta sätt få ett instrument att själv mäta sina undervisningsresultat med och en möjlighet att jämföra sina undervisningsresultat med andras.

En hel del intressanta resultat ha vunnits under själva arbetet med standardproven. Skillnaden i kunskapsnivå mellan olika klasser på samma stadium blir t. ex. skarpt belyst. Det förekommer faktiskt, att den prestation, som blir bedömd med BC i en klass, belönas med AB i en annan. Det har vidare visat sig, att — när det gäller mekanisk räkning — de bästa i andra årskursen prestera lika mycket som de sämsta i den sjätte.

Ännu en stor fördel har arbetet på dessa standardprov fört med sig: de ha föranlett lektor Wigfors och hans elever att fördjupa sig i några intressanta och givande pedagogiska problem. Dit höra sambandet mellan hastighet och säkerhet vid mekanisk räk-

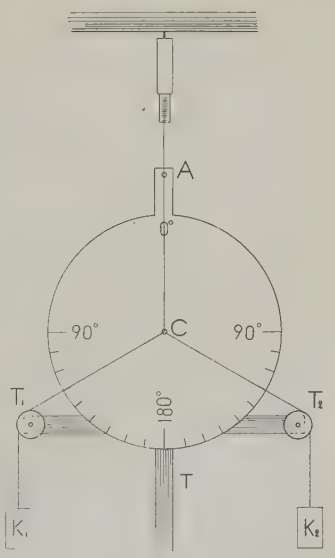
ning samt mellan skrivhastighet och räknefärdighet, undersökning av olika lärares betygskalor, av olika skolformers effektivitet m. m. Det skulle föra för långt att här redogöra för dessa undersökningar. Den intresserade kan själv skaffa sig besked i de ovan angivna publikationerna.

Sigurd Åstrand.

Anordning för demonstration av satsen om kraftparallellogrammen.

Vid Ludvika samrealskola införde undertecknad h.t. 1934 följande anordning för demonstration av nämnda sats.

Vid en dynamometer är en pappskiva av c:a 3 dm. diameter upphängd medelst en tråd, som löper dels genom ett hål *A* i den från pappskivan utskjutande delen *A*, dels genom skivans medelpunkt *C*. Utgående från riktningen av denna tråd har skivan åt båda hållen en gradering 90, 100, ... 180 grader. Vid *C* är nyssnämnda tråd förenad med två andra trådar, vilka löpa över trissorna T_1 och T_2 på »triss-stången» *T* och uppbära vikterna K_1 och K_2.



Genom olika inställningar av triss-stången kunna kraftriktningarna CT_1 och CT_2 varieras efter önskan och vinklarna, som de bilda med *OC*-linjen, direkt avläsas. Härvid tillses att *OC*-riktningen förblir vertikal t. ex. genom ett vid *C* upphängt lod.

Alla dynamometervärden minskas med vikten av själva pappskivan och vikten av det ev. använda lodet.

Skillnaden mellan den på detta sätt experimentellt bestämda resultanten och den grafiskt beräknade har befunnits röra sig om 1 à 2 % (100 g ekvivalent med 50 mm.).

Herman D. Nyberg.

Lösningars kokpunktsförhöjning.

En uppgift för de kemiska laborationsövningarna.

Av G. STARCK.

Bestämningar av lösningars fryspunktsnedsättning utgöra synnerligen lämpliga uppgifter för de kemiska laborationsövningarna i ringarna II^4 och II^3 och torde också allmänt stå på programmet för de kemiska elevarbetena. Försöken äro lätta att utföra; det finnes för ändamålet avsedda, ganska billiga termometrar, och man erhåller på två laborationstimmar ett rikhaltigt observationsmaterial till belysande av såväl icke-elektrolyters som elektrolyters fryspunktsnedsättning och lagarna därför.

Det i viss mån motsatta fenomenet, lösningars kokpunktsförhöjning, har väl ännu knappast varit ämne för skolans laborationsövningar, ehuru sambandet med lösningens osmotiska tryck och ångtrycksnedsättning är mycket tydligare än det mellan samma egenskaper och lösningens fryspunktsnedsättning. Utom i de ökade svårigheter, som försöket i sig själv erbjuder, torde man i detta fall finna orsakerna härtill vara svårigheterna, dels att finna ett lämpligt lösningsmedel, dels att finna en för ändamålet lämpad, tillräckligt billig termometer. Vatten har en ganska liten molekylär kokpunktsförhöjning och kan därför knappast ifrågakomma som lösningsmedel, även om det vore möjligt att för överkomligt pris anskaffa en uppsättning av i 1/10° indelade termometrar, upptagande några grader omkring 100°.

Nu finnes det i handeln en synnerligen billig, i 1/10° indelad, noggrann termometer, nämligen febertermometern, som omfattar intervallet 35—42°, liksom ett därtill hörande lösningsmedel med hög molekylär kokpunktsförhöjning, nämligen etyleter. Tyvärr är eterns kokpunkt vid normalt barometerstånd, nämligen 34,4°, något för låg. Man kan visserligen finna enstaka exemplar av febertermometrar, som gå så djupt, men flertalet har en skala med början vid 34,7°. I stället för att försöka införa en febertermometer med nedåt utvidgad skala, vilket enligt författarens erfarenhet skulle öka priset till det 5-dubbla, har jag funnit det bekvämare att genom en ringa tillsats av kloroform höja eterns kokpunkt ungefär 0,5°, då man kommer inom skalan av alla normala febertermometrar, oberoende av barometerståndet. De nedan angivna försöken äro utförda med en blandning 1000 cm^3 eter och 20 cm^3

kloroform, vars kokpunkt är ungefär 35,0° vid 760 mm. Eterns molekylära kokpunktsförhöjning angives till 2,14° (koncentrationsenhet g-mol/1000 g eter), resp. 3,01° (koncentrationsenhet g-mol/1000 cm^3 eter), d. v. s. 4 gånger så stor som vattnets. För ovannämnda blandning erhåller man ungefär samma värde.

Att använda ett blandat lösningsmedel är visserligen i princip oriktigt på grund av den under kokningen inträdande fraktioneringen, särskilt riskabel i fråga om eter, som genom sin flyktighet är mycket svår att kondensera. Vid nedan beskrivna laborationsförsök, som utförts utan återloppskylning för att icke komplicera apparaturen, kan det därför ej bli tal om att erhålla en konstant kokpunkt; tvärtom måste kokpunkten bestämmas raskt varvid man får räkna med att en så vitt möjligt noggrann likformighet i förfarandet vid samtliga försök i någon mån kompenserar felen.

Vid de laborationsövningar, då metoden prövades, användes en apparat enligt fig. 1. Den består av ett provrör, något tjockväggigare än vanligt, med ett vidsmält stigrör, vars huvudsakliga uppgift är att medgiva apparatens fästande i ett stativ, medan dess värde som kylare är tämligen illusoriskt. Provrörets längd är lika med längden av febertermometern, som sålunda befinner sig helt inuti röret.

För att förhindra överhettning ilägges en stor skärva av oglaserat lergods (blomkruka). Lösning ihälles, så att den täcker termometerkulan, varpå man uppvärmer med 50°-igt vatten, vari provröret nedsänkes, men endast så djupt, som figuren antyder. Sedan etern kommit i livlig kokning och fått koka under en vid alla bestämningar lika lång tid (i nedan angivna försök $^1/_2$ min.; en något längre tid, t. ex. 1 min. torde vara bättre), upplyftes apparaten ur vattnet, och temperaturen avläses.

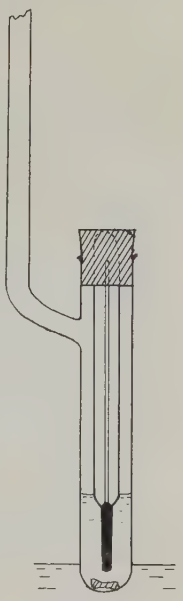


Fig. 1.

Febertermometern är en maximitermometer, vilket medför både fördelar och nackdelar. En fördel är, att man kan avläsa temperaturen efter försöket (dock åstadkommer en fullständig avsvalning en temperatursänkning av ca. 0,05°). En stor olägenhet är, att en eventuell överhettning automatiskt fastlåses och därför absolut måste förebyggas. För detta ändamål måste upphettningen ske raskt och kokningen ej försiggå länge, ej så länge, att kokstenen blir ineffektiv. Som nyss framhållits, måste kokningen avbrytas

tidigt även av den anledningen, att ett blandat lösningsmedel användes. En minut torde vara maximum.

Nedanstående lösningar bereddes i förväg av förf. genom upplösning av en avvägd substansmängd i 100 cm³ lösningsmedel:

	1	2	3	4	
Naftalin	0,50	0,75	1,00	1,50	g-mol/1000 cm³ eter(-kloroform)
Bensoesyra	0,50	0,75	1,00	1,25	

Man bör ej göra mera av lösningarna än som åtgår för klassens bestämningar; förbrukningen till varje försök är obetydlig, lösningsmedlet är dyrt, och slutligen äro eterlösningar ohållbara.

Följande värden på dessa lösningars kokpunktsförhöjningar erhöllos vid en laborationsövning i ring II[3]:

Lösning		$\Delta t°$	medeltal av	$\Delta t/C$	$(\Delta t/C)_m$
Naftalin	1	$1{,}42 \pm 0{,}035$	7 best	2,84	2,70
	2	$2{,}07 \pm 0{,}029$	7	2,76	
	3	$2{,}58 \pm 0{,}045$	8	2,58	
	4	$3{,}92 \pm 0{,}069$	9	2,61	
Bensoesyra	1	$1{,}52 \pm 0{,}047$	6	3,04	2,92
	2	$2{,}19 \pm 0{,}052$	6	2,92	
	3	$2{,}91 \pm 0{,}050$	6	2,91	
	4	$3{,}51 \pm 0{,}048$	6	2,81	

Varje laborantgrupp medhann 5 bestämningar (lösningsmedel och 4 lösningar) på en timme. Det erhållna värdet på den molekylära kokpunktsförhöjningen är något för lågt.

Av förf. utförda spec. viktsbestämningar av lösningarna tillåta en omräkning av koncentrationerna i g-mol/1000 cm³ lösning (= C'). Då erhålles:

för naftalinlösn. $\Delta t/C' = 2{,}96$; 2,96; 2,84; 3,04; medeltal 2,95;
för bensoesyralösn. $\Delta t/C' = 3{,}13$; 3,07; 3,12; —; medeltal 3,11,

d. v. s. bättre konstans och bättre överensstämmelse mellan naftalin och bensoesyra.

Bokanmälningar.

Poul Heegaard, *Um trideling av vinkelen*, Noregs Boklag, Oslo 1934, 77 sid., kr. 3: —.

Bland »Skrifter utgjevne av studentmållaget i Oslo» har utkommit en populär matematisk skrift — på nynorska. Det verkar närmast en smula förbryllande att läsa detta språk i tryck, behandlande ett matematiskt ämne. Lyckligtvis har förf. ej ersatt alla de internationella begreppen (vinkel, parabel, kvadrat etc.) med inhemska nydaningar, något som ju Georg Stiernhielm försökte hos oss och som f. n. försökes i Tyskland, utan han har behållit dem, om än stavningen är nationell (sirkel, irrasjonalt etc.).

Förf. behandlar först några närstående problem: Fermats problem, cirkelns kvadratur, kubens fördubbling, som bidraga till förståelsen av huvudproblemet. Vinkeldelningens exakta metoder representeras bl. a. av: inskjutningsmetoden enligt Arkimedes, »Ei onnar gamal gresk innskyting», Nikomedes och Pappos metoder, Vietas och Descartes'. Därpå visas, att exakt vinkeltredelning enbart med passare och linjal är omöjlig, enär problemet leder till den bekanta tredjegradsekvationen, som ej satisfieras av kvadratrötter.[1] Förf. beskriver ett antal instrument till vinkeldelning efter att först ärligen ha deklarerat: »Men eg har aldri høyrt tale um at desse apparata nokon gong har vore til praktisk gagn». Bland dessa märkes en nyhet, »eit greit og glögt uttenkt apparat», som konstruerats av en norsk bonde. Slutligen behandlas en serie approximativa lösningar, där förf. tydligen hämtat det mesta materialet från Mitzscherling,[2] enär han anför samma numeriskt felräknade vinkelfel som denne. Bland nyheter noteras »Prost Kornbrekkes metode». Skräddarmästare Kopf är även representerad men tyvärr med den mindre noggranna metod, som publicerades 1929. En bättre metod[3] publicerades 1933. »Manufakturhandlar Knudsens metode» är en nyhet, som tyvärr saknar närmare numeriska feluppgifter.

Förf. upplyser till slut — alldeles riktigt — att »problemet har ei evne til beint fram å bergta ofra sine». Han önskar emellertid,

[1] Jfr denna tidskr. 1935 sid. 86.
[2] Jfr denna tidskr. 1935 sid. 91.
[3] Jfr denna tidskr. 1935 sid. 93.

att hans bok skall upplysa »ikke-matematikarar» om, att man varken vinner ära eller »økonomiske fyremuner i det praktiske livet ved å ofra tid og krefter på å finna ei løysing». — Även detta är alldeles riktigt, men han skulle med lika stor rätt ha kunnat citera Ibsen:

»Og har jeg end sejlet min skude på grund
o, så var det dog dejligt at fare!»

J. Tandberg.

Ivar Malmer, *Elementär aerodynamik*, Albert Bonnier, Stockholm 1935, 124 sid., kr. 3:75.

Föreliggande arbete ingår i en serie handböcker, som under titeln »Flyg- och motortekniskt bibliotek» redigeras av Tord K. Ångström. Med all rätt har professor Malmers arbete placerats som nr 1 i serien. Behovet av upplysning angående de aerodynamiska problemen i en form, som kan tillgodogöras utan alltför djupgående matematiska förutsättningar, är nämligen i högsta grad trängande. För undervisningen är boken alldeles särskilt välkommen. Knappast något annat problem inom den tillämpade fysikens område förmår i så hög grad fängsla intresset hos vår tids ungdom som flygproblemet. Läroböckernas torftiga och icke sällan rent felaktiga upplysningar angående hithörande frågor äro beklagliga, om de också i någon mån kunna förklaras av den snabba utvecklingen av det teoretiska underlaget för flygproblemet. Det kan icke undvikas att kapitlet aerodynamik icke längre kan behandlas endast i förbigående utan måste tillerkännas en viktig plats i fysikundervisningen. Men var finna tid för allt det nya, som måste fram, då timantalet i stället för att ökas allt mer inknappas! Tills vidare få vi vara glada, om vi åtminstone kunna sätta böcker i händerna på de vetgirige. Med den borne pedagogens säkra blick för vad som kan fattas utan andra förutsättningar än dem skolan bibringar har professor Malmer förstått att meddela de viktigaste resultaten av den aerodynamiska forskningen. Framställningen börjar med en synnerligen klar och välbehövlig redogörelse för atmosfärens egenskaper och de allmänna gaslagarna och övergår sedan till behandlingen av luftkrafter å i luften befintliga kroppar. Här få vi göra bekantskap med de allmänna lagar, av vilka de flygtekniska problemen äro beroende och få lära känna den matematiska form, i vilken dessa lagar vid en elementär framställning kunna klädas. Särdeles tacksam torde mången vara för den elementära härledningen av Bernoullis ekvation, som ju är av grundläggande betydelse i aerodynamiken.

Strömningslärans många och betydelsefulla tillämpningar i fråga om flygproblemen behandlas på ett lätt begripligt och synnerligen intresseväckande sätt. Betydelsen av det Reynoldska talet, luftkraftkoefficienter, tryckcentrumlägen m. fl. för flygtekniken viktiga begrepp klargöras och deras praktiska betydelse påvisas genom enkla räkningar. Lekmannen och i all synnerhet fysikläraren har all anledning att vara författaren tacksam för denna utmärkta och i ordets bästa mening populära framställning av resultaten från ett modärnt forskningsområde, som på grund av bristen på lämpliga läroböcker hittills varit ganska svårtillgängligt.

T. E. Aurén.

Kurt Wegener, *Die Physik der Erde*, J. A. Barth, Leipzig 1934, 111 sid., RM 6:60.

Författaren framhåller i företalet till sitt arbete med all rätt, att geofysiken måste räknas till allmänbildningen. Våra skolkurser innehålla beklagligtvis endast spridda och mycket kortfattade upplysningar angående resultaten av den geofysikaliska forskningen. En kortfattad översikt av huvudproblemen inom detta forskningsområde och de medel, som man för närvarande förfogar över vid studiet av dessa problem, samt för de resultat, som ernåtts, torde säkerligen vara välkommen för alla dem, som intresserar sig för hithörande frågor, men som icke hava tillfälle att fördjupa sig i facklitteraturen. Föreliggande arbete har framgått ur föreläsningar hållna vid universitetet i Graz (Steiermark). Framställningen utmärker sig genom klarhet och överskådlighet samt är genomgående mycket elementär. Bokens huvudkapitel avhandlar bergarternas fysiska egenskaper, temperaturen i jordens inre, seismiska undersökningsresultat, jordmagnetismen, tyngdkraften, jordens form och kontinentens lägeförändringar. Författarens stil skiljer sig fördelaktigt från den, som vanligen möter oss i tyska läroböcker. Boken är synnerligen lättläst och texten förtydligas av många och goda figurer.

T. E. Aurén.

Herman T. Briscoe, *The Structure and Properties of Matter*. Mc Graw-Hill Book Co. Inc. New-York, 1935. 420 sid., kr. 21:—.

Arbetet utgör en bearbetning i bokform av de kurser i atomteori, som förf. under många år hållit för studenter vid Indiana University. Dessa studenter äro att lyckönska till att ledas av en verklig pedagog, som med skicklighet, klarhet och en tålmodig, för en lärare förebildlig bredd, som icke förbiser något led i utveck-

lingen, undervisar sina adepter i atomens historia ända från den grekiska filosofiens dagar fram till vår tid. Förf. är tydligen väl bekant med de svårigheter, som möta vid studiet av den moderna atomteorien och har en avundsvärd förmåga att utan större matematisk apparat klargöra de svåra punkterna. Som exempel må anföras de båda sammanhängande kapitlen »Radiation» och »The Bohr Theory of Atomic Structure and the Origin of Spectral Lines», där förf. leder läsaren från en så gott som fullständig obekantskap med strålning till de allmänna formlerna för alkalimetallernas spektralserier. Utförligt behandlas elektronernas fördelning omkring kärnan, atomernas valens särskilt ko-valens och koordinerad ko-valens och slutligen i det sista kapitlet den nya kvantmekaniken med dess tillämpning på valensläran, enkelt och klart framställd. Möjligen får förf:s landsmanskap med Lewis-Langmuir en alltför stark betoning genom en omotiverat bred behandling av dessa forskares valensteori — en behandling ej alldeles fri från smärre inadvertenser. I avslutningen uttalas några sansade reflektioner beträffande vetenskapens nuvarande ståndpunkt och dess framtid.

Arbetet bör, med undantag möjligen för vissa partier, kunna med förståelse och behållning läsas av elever i den högsta realgymnasieringen.

G. Starck.

A. Farkas, *Orthohydrogen, Parahydrogen and Heavy Hydrogen,* Cambridge University Press, 1935. 215 sid., inb. kr. 12: 50.

Molekylärt väte förekommer i två modifikationer, orto- och paraväte, skilda genom kärnspin och rotationskvantatal. Ortovätemolekylerna hava parallella kärnspin och udda rotationskvantatal, paravätemolekylerna antiparallella kärnspin och jämna rotationskvantatal. Existensen av de båda modifikationerna förutsades av Heisenberg och Hund 1927 på kvantteoretiska grunder; det experimentella påvisandet därav lyckades för Bonhoeffer och Harteck 1929. Vanligt väte är en jämviktsblandning av de båda formerna i proportionen 25 % para: 75 % orto; genom stark avkylning (med flytande väte) vid närvaro av en katalysator (träkol) kan man förskjuta jämvikten, så att nästan rent paraväte erhålles. Sammansättningen av en blandning kan bestämmas genom en mätning av gasens värmeledningsförmåga; om man sänder en elektrisk ström genom en motståndstråd, omgiven av paraväte, blir trådens temperatur, bestämd genom dess motstånd, lägre än om den omges av normalt väte, emedan paraväte har större värmeledningsförmåga än ortoväte. Paraväte är mycket beständigt; dess delvisa

omvandling till ortoväte i överensstämmelse med jämviktsreaktionen kräver upphettning till 900° eller inverkan av en katalysator, t. ex. platinerad asbest.

Ett stort antal forskare, bland dem författaren till denna monografi, har ägnat sig åt den allsidiga undersökningen av särskilt paravätet (ortoväte kan ej framställas i rent tillstånd). Man har bestämt dess fysikaliska och kemiska egenskaper och särskilt ingående reaktionskinetiken vid omvandlingen till och från ortoväte. Allt detta får en ingående behandling ur såväl teoretisk som experimentell synpunkt, upptagande den förra hälften av arbetet. Även på det tunga vätets gebit har Farkas varit självständigt verksam, och den framställning han ger av detta populära kapitel i den moderna kemien synes vara lika vederhäftig, som den är detaljerad och vetenskaplig.

En rikhaltig litteraturförteckning kompletterar det intressanta och värdefulla arbetet.

G. Starck.

Herbert G. Lehmann, *Shop Projects in Electricity*, American Book Company, New York, U. S. A. 190 sid., kr. 4: 50.

De flesta pojkar i realskolan önska gärna arbeta med och fabricera apparater på de områden av fysiken, som de läsa i skolan. Vad elektricitetsläran beträffar, är det ofta svårt för dem att själva göra apparaterna, eftersom det brukar ställa sig alltför dyrbart. För många lärare kan det också vara besvärligt nog att giva praktiska anvisningar, då eleverna önska råd vid byggandet.

Ovannämnda bok innehåller beskrivning på 21 st. apparater från en enkel kompass till en 1-rörsmottagare. Materialet är det enklast tänkbara. Måtten äro tydligt angivna (i inches), och noggranna anvisningar, hur man skall komma förbi felkällor, äro givna. Visserligen är boken skriven på engelska, men med lärarens hjälp bör en pojke ändock kunna tillgodogöra sig innehållet och förfärdiga de beskrivna apparaterna. En anekdot föregår varje apparatbeskrivning, och efter varje stycke finnas frågor och svar på området.

Figurerna äro rikliga och mycket tydliga. Arbetsritningarna äro enkla men dock fullt verkstadsmässiga. Några kopplingsschemata förekomma även.

Bokens författare var nyutexaminerad ingenjör, som ej fått arbete. Han slog sig då på författandet av denna bok, och resultatet kan rekommenderas åt intresserade.

B. Pettersson.

Bj. Bjerke og K. Glimme, *Fysikk for realgymnasiet.* I. Mekanikk, 121 sid., kr. 3:50; II. Varmelære, 57 sid., kr. 2:50; III. Bølger, lyd och lys, 107 sid., kr. 3 50; IV. Elektricitetslære, 139 sid., kr. 4:50; Tilleggsbind: Stoff og energi i lys av nyere forskninger, 20 sid., kr. 1:—. Alla i klotband. Gyldendal Norsk Forlag, Oslo 1933.

Fysikens och teknikens raska framsteg ha överallt i världen satt fysikundervisningen i samma svåra situation. Det förefaller, som om man just nu söker den framkomliga vägen i två rakt motsatta riktningar. För den ene kan det vara naturligare att söka bevara grundligheten genom att stryka ur kursen större sammanhängande partier. Han läser »mer och mer om mindre och mindre». Den andre söker behålla kursens gamla omfattning och därtill lägga så mycket som möjligt av det nya. Han tvingas att läsa »mindre och mindre om mer och mer».

Bjerke-Glimme är i det hela en lärobok av det senare slaget. Särskilt gäller detta om Bjerkes andel mekaniken, värmeläran och elektricitetsläran. Behandlingen är ofta föga ingående, så att den troligen måste avsevärt kompletteras av läraren, i synnerhet som illustrationsmaterialet åtminstone i de två första delarna är fattigt. Vissa tendenser till rensning av kursen finnas visserligen men leda till ganska egendomliga proportioner. Medan ångturbiner och explosionsmotorer få nöja sig med tillsammans en halv sida, erhåller t. ex. spec. vikt 5 sidor, därav pyknometern och areometern vardera en halv.

I elektricitetsläran betonas det matematiska mer än i vårt land. Sålunda förekommer kvantitativ behandling av krafterna mellan ström och magnetfält, det elektrostatiska och magnetiska fältets energi, induktionen och svängningskretsarnas period. Här och där anlägges historiskt betraktelsesätt, så att t. ex. behandlingen av ringankaret i någon mån kan försvaras.

Optiken är nog den del, som en svensk läsare bäst känner igen. Härledningen av linsformeln må framhållas. Glimmes väg från tunna prismer till tunna linser är otvivelaktigt en genväg, men härledningen av formeln för det tunna prismat bör i så fall göras generell (se därom t. ex. Westphal, Physik, 3. Aufl., S. 434).

Tilläggshäftet (20 sid.) behandlar kvant- och relativitetsteori. Kvantteorien behandlas med en viss frodig konkretion. Den potentiella energien i Bohrska atommodellen vållar naturligtvis samma svårigheter som i alla alltför elementära framställningar. Den nya vågmekaniken förklaras till sist på två sidor.

När man efter slutat studium lägger boken från sig, kan man kanske inte undertrycka en fråga. *Om* vi här i landet hade haft

en central granskningsnämnd, sådan som 1934 års lärobokssakkunnige föreslagit, och *om* en bok sådan som denna lämnades in för prövning, hur skulle det gå? Jag vågar inte profetera. Men jag tror att utgången skulle hänga på om nämndens experter hörde till dem som läsa mer och mer om mindre och mindre eller till dem som läsa mindre och mindre om mer och mer.

R. Lundblad.

Sverre Bruun og Olaf Devik, *Lærebok i Fysikk for Realgymnasiet. Varme,* 118 sid., kr. 3:75. Tillegg med detaljoplysninger om enkelte apparater og forsøk, 16 sid., kr. 0:75. Olaf Norlis Forlag, Oslo 1933.

En modern lärobok i värmelära, väl värd att få en svensk läsekrets. Dispositionen avviker betydligt från den vanliga. Redan på sid. 12 är man framme vid värmeekvivalenten och på sid. 15 vid värmets överföring, medan utvidgningsläran kommer först på sid. 64. Orsaken är, att författarna vilja giva begreppet värmeström den plats, som svarar mot dess betydelse i naturen och i tekniken. Greppet är ovanligt men lovande; recensenten måste beklaga, att den knappa lektionstiden hos oss icke ens medgiver ett försök att i praktiken följa författarna på den väg de inslagit.

Illustrationerna äro klara och rediga och övningsexemplen praktiska, ofta originella. Boken är skriven av män, som ha klart för sig, att experimentet på lärorummet måste vara undervisningens självfallna utgångspunkt, men som också veta, att en undervisning, som alltför mycket stänger sig inne i skolans trånga förhållanden, blott till hälften fyller sin uppgift.

Ett tilläggshäfte finnes med anvisningar för läraren. Det tycks vara umbärligt. Kanske kan det vara till någon nytta för nybörjare.[1]

R. Lundblad.

Actualites scientifiques et industrielles är namnet på en för närvarande cirka 200 nummer stark serie av korta monografier i naturvetenskapliga ämnen, som utges av Hermann et Cie, Paris, under ledning inom varje särskilt område av Frankrikes namnkunnigaste forskare. Sålunda svarar P. Langevin för »Rélativité» och »Physique générale», J. Perrin för »Atomistique», G. Urbain för »Théories chimiques», M. Curie (till sin död) för »Exposés de radioactivité et de Physique nucléaire» o. s. v. Dessa tunna häften

[1] Lärobokens övriga delar (Mekanikk; Bølger, Lyd, Lys; Elektrisitet) komma att anmälas i ett senare häfte. *Red.*

om 20—40 sidor, billiga men typografiskt synnerligen smakfulla, ge läsaren intryck av att åhöra ett eller ett par föredrag om det nyaste på ett visst begränsat område. Nedanstående författarnamn och boktitlar kräva inga kommentarer:

N:r 62, Mme Pierre Curie, Les rayons α, β, γ des corps radioactifs en rélation avec la structure nucléaire, 1933, 40 sid., 12 fr.

N:r 182, Irène Curie et F. Joliot, L'électron positif, 1934, 27 sid., 10 fr.

N:r 185, M. Haïssinsky, Les radiocolloïdes, 1934, 25 sid., kr. 2:70.

N:r 199, F. Joliot et Irène Curie, Radioactivité artificielle, 1935, 28 sid., 10 fr. *G. S.*

Sture Nydell, *Elektroteknik för sjökaptensklasser jämte handledning i radiopejling m. m.*, Sv. Bokförlaget, Stockholm 1934, 194 sid., kr. 10:50.

Föreliggande lärobok har redan varit föremål för anmälan i denna tidskrift (sept. 1934, sid. 182). Då jag hos redaktionen anhållit om plats för ännu en anmälan, är det därför att jag, och flera med mig, hysa en annan åsikt om boken än den enligt vårt förmenande mycket välvillige recensenten.

Enligt min mening är boken olämplig för sitt ändamål. Jag grundar detta omdöme bl. a. på erfarenheter från den försöksundervisning i ämnet vid Göteborgs Navigationsskola, som var anordnad, innan ämnet ännu hade fastställts i läroplanen för navigationsskolorna. Mina anmärkningar gälla i huvudsak dels planläggningen av ämnet, dels lärostoffets omfattning samt slutligen väsentliga punkter ifråga om de tekniska tillämpningarna m. m.

Nydell har velat frångå det gamla framställningssättet av elläran, vilket ju började med elektrostatiken, för att få en mera »praktiskt» betonad lärogång och därvid börjat med elektrodynamiken. Detta Nydells försök att, med denna utgångspunkt, uppbygga de elektriska begreppen, anser jag emellertid misslyckat. Omkastningen av ordningsföljden i lärogången har nämligen ej åtföljts av en inre omgestaltning.

Lärobyggnaden saknar hållning. Enande, samlande begrepp såsom energiprincipen, elektriska krafter och linjer och enkel atomfysik användes blott sporadiskt.

Det gamla vanliga framställningssättet saknar i regel de huvudlinjer som göra gnidnings-, galvanisk-, och induktionselektriciteterna till barn av samma föräldrar, fader Kraft och moder Jord. Det har dock det historiska framställningssättets förtjänster, vilket Nydells saknar.

Typiskt för denna bok, som så många före den, är, att man skriver om både magnetiska och elektriska kraftlinjer, men *man gör aldrig bruk av dem.* Sammansättning av fält förekommer endast sporadiskt, och då ej helt genomfört. Beskrivningen av de elektriska och magnetiska krafternas mekaniska verkningar såväl som förklaringen av ström och spänning bli härigenom med nödvändighet splittrade.

Vilka konsekvenser detta leder till, framgår av förklaringen av en elektrisk ström (sid. 21): »Elektronernas vandring beror på en mycket viktig lag» etc. varpå följer Coulombs lag. En vetgirig yngling frågar sedermera, då han skall tillämpa ovannämnda förklaring på strömmen: Var finnas de plusladdningar, som draga elektronerna runt i sekundärlindningen i en transformator? Eller var finnas de i en generator?

Att arbetet enligt min åsikt är felplanerat i sin helhet och elläran sönderbråkad till ett olustigt puzzle, utesluter icke en del detaljanmärkningar. På sid. 7 behandlade magnetiska enhetspoler och Coulombs lag i magnetismen kan strykas helt, ty dels behöva eleverna ej detta, dessutom göres ej bruk av kapitlet senare. — Författaren ger tre regler för tillämpning av samma grundlag, tum-, skruv-, och lillfingerregeln. Eleverna rätt undervisade, reda sig med enbart skruvregeln. Ju flera regler, desto oklarare. — Figuren över elektrometern (sid. 17) kan saklöst undvaras liksom längre fram en sida fin stil om hysteresisslingan. — Kapitlet elektrisk influens sid. 23, kunde ha använts för att förklara, huru en elektrisk ström uppkommer i en ledare, men det har inte författaren gjort. I stället är det det gamla vanliga, som enligt min åsikt gör större skada än nytta, eftersom eleverna få för sig, att detta är någonting på sidan om den egentliga elläran.

På sid. 29 kan formeln för magnetiska fältet i en lång spole, och texten till den borttagas. Eleverna röra obönhörligt ihop H med flödet, eftersom något klart begrepp om magnetismen ej tidigare givits. För övrigt behöva de ej formeln. Detsamma gäller sid. 64—70: ström, spänning och effekt vid växelström samt växelströmsmaskiner. I ett fartygs kraftanläggning förekomma i regel ej dylika maskiner, undantagandes några få turboelektriska fartyg. — Likströmsmotorn, sid. 55, är mycket oklart framställd med dåliga figurer. — Beträffande kapitlet om radio äro samtliga antennkretsar ofullständigt utritade i figurerna. Kapaciteten antenn- jord saknas konsekvent, och eleverna kunna sålunda förfarande ha för sig, dels att antennkretsen icke är avstämd, dels att antennenergien hokus pokus pumpas ut genom antennspet-

sen, eftersom denna slutar blint. En hel sida beskrivningar av olika antenntyper, rena oväsentligheterna, kan undvaras.

På sid. 85 ha induktiva och kapacitiva spänningsfallen förväxlats. Citeras: »Det induktiva spänningsfallet är, som i XVI utretts, 90° efter strömmen i fas.» Motsvarande fel göres vid kapacitiva spänningsfallet.

Sid. 91—92 citeras: »Vid radiotelegrafi användes en summer, om, vilket någon gång äger rum, modulering sker vid sändaren.» Påståendet är oriktigt. Praktiskt taget samtliga rörsändare i handelsflottan äro modulerade, dessutom icke med summer utan genom att rörsändaren matas med 500-periodig växelström eller rå likriktad sådan.

Författare av populära radioböcker ha i regel en ättestupa i gallerlikriktningen, sid. 94. Utan tidigare strikta och klara grundbegrepp i framställningen göres alltid fel vid förklaringen. Så ock här. Jag citerar: »— — — men elektronerna i Cg_2 kunna ej komma tillbaka till gallret, enär de elektroner, som detta erhåller från glödtråden, stöta dem tillbaka». Det är bakvänt, att skilja mellan gallret, gallerledningen och gallerkondensatorns belägg 2. De äro elektriskt ett, en och samma ledare. Endast vid ultrakortvåg skulle man bli tvungen att göra det. Förklaringen är mycket enklare. Eftersom gallret är kallt, kunna elektronerna ej komma någon vart. Förövrigt är författarens påstående felaktigt. Gallret mottager icke elektroner i det omtalade ögonblicket, eftersom gallerspänningen just då är negativ.

Sid. 101, kapitlet om röret som generator, läses: »Man tänder röret och erhåller därigenom en strömstöt i spolen L, spänning induceras i återkopplingsspolen S, varvid i denna uppstå fria svängningar.» Fel. Det uppstår inga fria svängningar i S utan i svängningskretsen LC. Pedagogiskt sett, är felet rysligt. Eleverna gå miste om kvintessensen i hela principen, nämligen den roll, svängningskretsen LC spelar.

Kapitlet G. är en beskrivning och bruksanvisning på 14 sidor av Telefunkens (äldre) pejlapparat. Ett trettiotal sådana finnas i handelsflottan mot över sjuttio av ett annat fabrikat, Firma Ramantenn, svensk. Valet av apparattyp är sålunda icke representativt för handelsflottan.

På tio sidor, cirka, ges därefter en beskrivning på gnistradio, som kaptenseleverna ej behöva i sitt yrke. Sålunda en ovidkommande sak, som bara gör det besvärligare för dem.

Därefter följer en beskrivning av en alarmapparat med tillhörande daglig skötsel. Denna apparat får endast skötas av den

utexaminerade radiotelegrafisten. Sålunda ännu ett lik i lasten för sjökaptenseleverna.

I detta sammanhang får jag sätta ifråga lämpligheten av att belasta läroböcker med detaljbeskrivningar av speciella typer av navigationsinstrument etc. såsom ovannämnda pejlapparat, ekolod och alarmapparat. Man tycker att firmorna själva skulle ha intresse av att under hand förse navigationsskolorna med färska nyheter, med trycksaker till samtliga lärjungar. Dessa detaljbeskrivningar bli ju gamla redan efter ett par år och fördyra boken i onödan.

Priset på boken kr. 10:50 står ej på något vis i proportion till innehållet. Upplagan är förmodligen mycket obetydlig, eftersom endast sjökaptenseleverna läsa boken, varför det höga priset torde vara förklarligt men därför ej utan vidare försvarligt enligt vad ovan påpekats.

I företalet skriver herr Nydell: »med tacksamhet erkänner jag den nytta, jag haft av följande arbeten: — — —, — — —, Landtförsvarets kommandoexpeditions Elektroteknikens grunder, — —,.» Herr Nydell bör vara särskilt tacksam mot denna bok, eftersom han praktiskt taget ordagrannt fått sitt kapitel om gnistradio därifrån.

Telegrafverkets Radioexpedition. Göteborg den 15 september 1935.

Thomas Övergaard.

Några engelskspråkiga tidskrifter.

För att förbättra de pedagogiska greppen och hålla kunskapsförrådet någorlunda i nivå med vetenskapens rastlösa frammarsch behöva lärarna i naturvetenskapliga ämnen kanske mer än sina övriga kolleger äga tillgång till det stimulerande enzym som en god facktidskrift skänker. Entusiasm och kunskaper läcka bort med åren och behöva ständigt förnyas genom den vidgade horisont som en dylik publikation öppnar. Enär möjligen åtskilliga av kollegerna ännu ej varit i tillfälle att stifta bekantskap med nedanstående amerikanska tidskrifter av mer eller mindre naturvetenskapligt innehåll, ber undertecknad här få lämna en kort anmälan.

Såsom den såväl till utstyrsel som innehåll förnämligaste bör främst framhållas *Journal of Chemical Eduction* (pris 4 doll.), som utkommer med 12 foliohäften per år, tillsammans ca 700 sidor. Den finnes införd vid ett och annat svenskt läroverk men är förtjänt av vida större spridning, ej minst med tanke på de stora krav det enskilda arbetets ledande ställer på läraren. Såväl de

mångsidiga pedagogiska uppslagen som de översiktliga framställningarna av olika områden ur nutidens kemiska forskning och teknik — även inom gränsområdena mot fysik och mot biologi — äro skrivna av framstående fackmän samt rikt och förstklassigt illustrerade på utmärkt papper. Dessutom föreligga i varje nummer intressanta kapitel ur de kemiska upptäckternas historia, redogörelser för nya experiment och apparater, förslag till nya elevlaborationer, matematisk behandling av fysikaliskt-kemiska problem samt välfyllda avdelningar med referat och bokanmälningar. För undervisningen på gymnasiet, men i stor utsträckning även för realskolans kurs, är tidskriften en guldgruva vartill undertecknad ej känner något motstycke. Den är direkt tillrättalagd för kemilärarnas behov, men dess redogörelser för elevers enskilda arbeten och för utprovande av nya pedagogiska uppslag samt anknytningar till fysik, biologi och geologi kunna ej undgå att även hos lärare i andra naturvetenskapliga ämnen väcka livligt intresse. Tidskriften borde finnas i varje gymnasium, där intresserade kemilärare arbeta.

Science är en gammal välkänd tidskrift, ungefär motsvarande den numera alltför dyra *Die Naturwissenschaften*, och utkommer med ett foliohäfte i veckan, utgörande ca 600 sidor per år (pris 6 doll. plus porto). Den lämnar utblickar inom alla naturvetenskapliga ämnen, författade av pennor av högsta vetenskapliga värde, diskussioner över nya vetenskapliga frågor, redogörelser för apparater och laboratoriemetoder, specialartiklar samt recensioner av nyutkommen litteratur inom naturvetenskapligt område. Som ett gott hjälpmedel för lärarens vetenskapliga rustning vid den högre undervisningen samt för att utvidga området av hans vetande till större universalitet kan tidskriften varmt rekommenderas. Populärvetenskaplig är den emellertid ej, utan det förutsättes att läsaren redan är ganska hemma på de områden uppsatserna behandla.

School Science and Mathematics (pris 3 doll.) utkommer med 9 häften årligen, tillsammans ca 1000 sidor. Formatet är betydligt mindre än hos de föregående, illustrationerna sparsamma, och innehållet, som närmast motsvarar realskolans stadium, är fördelat på de olika naturvetenskaperna samt på matematik. Dessutom finnes en avdelning frågor och problem, av vilka de matematiska äro av mycket varierande svårighetsgrad, samt bokanmälningar. Ett och annat uppslag av intresse kan läraren stundom finna i denna tidskrift, men ofta behandlar den sitt ämne i en för våra förhållanden något för ytlig form, och innehållet verkar ej alltid tillförlitligt.

The Science Leaflet hette förr *The Chemistry Leaflet* men utvidgades för ett par år sedan till att även omfatta fysik och biologi och erhöll då sitt nuvarande namn. Publikationen utkommer under läsåret september –maj med 30 häften av jämförelsevis obetydligt format, utgörande tillsammans ca 1200 sidor (pris 2,50 doll.) samt är huvudsakligen avsedd för skolelever och lekmän, som önska erhålla ett mosaikartat vetande i form av lättsmälta tidningsnotiser och kuriositeter, kryddade med skämtbilder, lustiga visor, kemiska teaterstycken och naturvetenskapliga korsordsgåtor. Tidskriften följer emellertid påpassligt med vetenskapens nyvinningar i den mån dessa äro av sådan art, att de kunna förutsättas väcka menige mans intresse, och uppgiften att söka popularisera dylikt vetande hos ungdomliga läsare torde den fylla på ett stimulerande sätt. Såsom ett naturvetenskapligt nyhetsblad i den skämtsammare stilen, en cocktail för en trött lärare, kan den i viss mån rekommenderas, ehuru den inom en skolas naturvetenskapliga lärjungeförening säkerligen har en större mission. Åtminstone bruka undertecknads elever med intresse studera de på läroverkets kemiska institution framlagda häftena, och innehållet synes falla i god jord.

Bland mer allmänt hållna och i pedagogisk riktning betonade tidskrifter ber undertecknad slutligen få fästa uppmärksamheten på den år 1930 startade och mycket förnämliga *Journal of Higher Education.* Den utkommer med 9 häften per år, tillsammans ca 500 sidor (pris 3,50 doll.) och har sitt värde framför allt i fråga om undervisning och administration på högstadiet. De olika sidorna av lärarens verksamhet behandlas här på ett utomordentligt intresseväckande sätt, nya vägar inom pedagogiken belysas, psykologiska undersökningars resultat framläggas, och elevernas inställning till studierna och till lärarna undersökes. Man fylles av livliga reflexioner vid läsandet av dessa fullödiga uppsatser, skrivna av erfarna pedagoger av högsta vetenskapliga rang, och finner mycket av deras innehåll vara av djupt och bestående värde för lärarens dagliga gärning, oberoende av undervisningens ämnen. I fråga om innehållets allmänna gedigenhet känner undertecknad ingen tidskrift, som i värde kan mäta sig med denna. Därtill kommer, att åtskilliga av uppsatserna just behandla de naturvetenskapliga ämnena och deras metodik, och även dessa äro av utomordentligt hög kvalitet. Tidskriften borde finnas i varje gymnasiums bibliotek. Varje lärare, som uppmärksamt studerar densamma, skall finna, hur hans pedagogiska gärning förädlas och växer därav och hur hans syn på kallets olika sidor fördjupas och klarnar. Kan han begära mer än så av en tidskrift?

E. Nordefeldt.

Gradualavhandlingar.[1]

NILS WIGREN, *Zur Kenntnis der organischen Arsenverbindungen.* Uppsala 1935. 140 sidor. Disp. i Uppsala den 25 maj 1935. Opponenter: docent P. NYLÉN och amanuens, fil. mag. E. SAMÉN.

Den italienske forskaren GOSIO upptäckte för c:a fyrtio år sedan, att en liten grupp s. k. arseniksvampar (Penicillium brevicaule o. a.) kunde överföra oorganiska arsenikföreningar i en gasformig, mycket giftig arsenikförening, som enligt GOSIOS uppfattning ej bestod av arsenikväte utan av en organisk arsenikförening, en alkylarsin. Denna förening ansågs även bära skulden till de en tid mycket talrika förgiftningsfall, som förekommo bland personer, som bebodde rum med arsenikhaltiga tapeter. BIGINELLI, som fortsatte GOSIOS undersökningar, kom till det resultatet att den arsenikhaltiga gasen var *dietylarsin*, $(C_2H_5)_2AsH$. Genom att absorbera gasen i en saltsyresur sublimatlösning erhöll han nämligen en vit, välkristalliserad förening, vars sammansättning motsvarade formeln $(C_2H_5)_2AsH + 2\,HgCl_2$. Av kokande vatten omvandlades denna substans till en vid avsvalning utkristalliserande oxidationsprodukt, som han tillskrev formeln

$$O\begin{cases}As(C_2H_5)_2H + 2\,HgCl_2\\ |\\ As(C_2H_5)_2H + 2\,HgCl_2.\end{cases}$$

BIGINELLIS resultat bestredos av den svenske kemisten KLASON, som ansåg sannolikt, att de båda sistnämnda produkterna voro identiska och utgjordes av vid kvicksilverklorid bunden *bis-[dietylarsyl]-oxid*: $[(C_2H_5)_2As]_2O + 4\,HgCl_2$.

Genom kvantitativ analys kan man ej skilja mellan dessa tre föreningar, då deras procentiska sammansättning är inom de analytiska felgränserna överensstämmande. För att experimentellt verifiera sin åsikt absorberade KLASON »Gosiogasen» i konc. salpetersyra. Då syran avdunstat återstod en förening, som överensstämde med den av LANDOLT förut framställda *dietylarsinsyran*, $(C_2H_5)_2AsO_2H$.

I avhandlingens andra kapitel, del I, redogöres för framställningen av dietylarsin, dietylarsyloxid och dietylarsinsyra i rent tillstånd. Dessa substanser erhöllos ur dietylarsyljodid, vilken framställdes medelst en omsättning, som utgör en variant av den av G. MEYER upptäckta reaktionen för framställning av organiska arsenikföreingar genom att behandla arkaliarsenit med alkylhalogenider. Genom att undersöka dietylarsinens och dietylarsyl-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

oxidens förhållande till saltsyresur sublimatlösning samt genom studium av dietylarsinsyrans egenskaper framgingo såsom huvudresultat av denna del av undersökningen: a) den av LANDOLT framställda dietylarsinsyran var oren b) BIGINELLIS och KLASONS åsikter rörande den av arseniksvampar alstrade flyktiga arsenikföreningen måste vara oriktiga, då densamma ej kan vara varken dietylarsin eller dietylarsyloxid.[1]

De vid framställningen av ovannämnda dietylarsylföreningar använda metoderna visade sig väl lämpade för framställning av ett flertal förut okända osymmetriska dialkylarsylföreningar. Härför redogöres i avhandlingens andra kapitel, del II.

Avhandlingens tredje kapitel omfattar framställningen av tertiära osymmetriska arsenikföreningar, som samtidigt äro karbonsyror. Dessa föreningar framställdes genom att kombinera sekundära, osymmetriska arsenikföreningar i alkaliskt medium med halogensubstituerade karbonsyror, en reaktionstyp, som är en ny variant av den förut omnämnda Meyerska reaktionen. De erhållna produkterna äro karboxylerade, osymmetriska arsinoxider utom i ett anomalt fall, då en icke karboxylerad, tertiär arsinoxid erhölls. Dessa oxider kunna samtliga lätt överföras i motsvarande sulfider.

De framställda arsinsyrorna liksom de karboxylerade arsinoxiderna äro, enligt vad man kan vänta med hänsyn till deras byggnad, amfotera elektrolyter. Av intresse syntes därför bestämningen av deras dissociationskonstanter vara, så mycket mera som av dessa föreningstyper endast kakodylsyran förut undersökts ur denna synpunkt. För jämförelsens skull bestämdes även dissociationskonstanterna hos de karboxylerade arsinsulfiderna, vilka sakna basiska egenskaper och sålunda äro rena syror. Dessa undersökningar behandlas i kapitel IV.

Avhandlingens sista kapitel är ägnat åt studiet av de framställda osymmetriska arsenikföreningarna ur stereokemisk synpunkt. Sedan man på grundval av VAN'T HOFFS och LE BELS åsikter om den molekylära asymmetrien och dess samband med optisk aktivitet, d. v. s. förmågan att vrida svängningsplanet för polariserat ljus, utbyggt kolets stereokemi, vände sig forskningen på detta område mot andra element. Så kan man anse den principiella analogien mellan den asymmetriska kolatomen och den koordinativt fyrvärda kväveatomen ur stereokemisk synpnukt som fullkomligt säkerställd genom en mångfald glänsande experimentalundersökningar. Även

[1] Helt nyligen har engelsmannen CHALLENGER publicerat mycket ingående undersökningar av Gosiogasen. Av dessa framgår att densamma består av *trimetylarsin*.

fosfor och arsenik hava varit och äro föremål för den stereokemiska forskningens intresse. Av de arsenikföreningar, som innehålla en asymmetrisk, koordinativt fyrvärd arsenikatom, hade hittills endast en kunnat uppdelas i de två optiskt aktiva former, som teorien fordrar, nämligen den av de engelska forskarne Mills och Raper framställda och undersökta p-karboxyfenyl-metyl-etyl-arsinsulfiden.

I analogi härmed ha de av mig framställda tre karboxylerade arsinsulfiderna kunnat uppdelas i sina optiska antipoder. I alla tre fallen kunde såväl höger- som vänsterformen erhållas i rent tillstånd. Av dessa sulfider äro sålunda karboxymetyl-etyl- och karboxymetyl-n-propyl-arsinsulfiderna de första a l i f a t i s k a arsenikföreningar med asymmetrisk As-atom, av vilka optiskt aktiva former erhållits. Däremot gåvo försöken att »aktivera» dialkylarsyrorna och de karboxylerade arsinoxiderna negativt resultat i överensstämmelse med de erfarenheter, som gjorts av andra forskare på detta område.

En gåva.

Fjolårets givare (se årg. *17*, 1934, sid. 115) har även i år ihågkommit tidskriften med en gåva, som gjort det möjligt att under 1935 fortsätta utsändandet av ett friexemplar av tidskriften till en elev vid vart och ett av rikets högre läroverk (allm. och tekniska läroverk, kommunala och privata gymnasier med reallinje, folkskoleseminarier). Rektor och huvudlärarna i matematik, fysik och kemi ha i samråd utsett en elev, som genom intresserat och framgångsrikt arbete inom denna ämnesgrupp gjort sig förtjänt av en uppmuntran. De så utsedda återfinnas i nedanstående förteckning.

Meddelanden från mottagare av fjolårets gratisexemplar vittna om att eleverna uppskattat och kunnat tillgodogöra sig tidskriftens innehåll i avsevärt större utsträckning än mången förmodat.

Till givaren framföres såväl mottagarnas som redaktionens tack.

Högre allmänna läroverk: Sture Frånn, Borås; Gösta Johansson, Eksjö; Sten Kihlgren, Eskilstuna; Claes Grunde, Falun; Erik Bergkvist, Gävle; Berndt Berndtsson, Göteborgs latinl.; Helge Johansson, Göteborgs reall.; Margareta Eriksson, Göteborgs flickl.; Maja Kärrberg, Halmstad; Arne Johansson, Hudiksvall; Per Sylvan, Hälsingborgs gossl.; Ebba Andersson, Hälsingborgs flickl.; Lars-Åke Flemström, Härnösand; Hjördis Björkegård, Jönköping; Ingvar Franzén, Kalmar; Nils Svensson, Karlskrona; Lars Karlbom, Karlstad; Olof Jönsson, Kristianstad; Bengt

Andersson, Kristinehamn; Nils Sörensson, Landskrona; Stig Sunner, Linköping; Karl-Gustaf Hjerpe, Luleå; Nils-Åke Bengtsson, Lund; Bengt Gustafsson, Malmö gossl.; Margaret Overton, Malmö flickl.; Markus Båth, Norrköping; Börje Oliw, Nyköping; Gunnar Widén, Skara; Sten-Erik Johansson, Skövde; i Stockholm: Lennart Ljungberg, Norra latinl.; Bertil Bergman, hal å Södermalm; Vidar Vestberg, Nya elem.; Birger Holmer, Norra reall.; Lars Barr, hal a Östermalm; Sven Beckman-Dahlström, hal å Kungsholmen; Inga Ekelund, flickl.; Olof Gefvert, Strängnäs; Bo Kjellberg, Sundsvall; Erik Olsson, Södertälje; Yngve Hessel, Uddevalla; Gunnar Ljunglöf, Umeå; Per-Olow Löwdin, Uppsala; Bengt Eklund, Visby; Erik Ljungström och Karl Gustav Thorstensson, Vänersborg[1]; Olle Widhe, Västervik; Jan-Krister Zanders, Västerås; Carl Erik Fröberg, Växiö; Carl Hansson, Ystad; Ingemar Ahrel, Örebro; Ambjörn Lindhé, Östersund.

Kommunala och privata läroverk: Erik-Gustaf Holmblad, Djursholm; Ingrid Olsson, Eslöv; Lars Sjöberg, Göteborgs högre samskola; Gösta Gilljam, Lidingö; Åke Hjertstrand, Lunds privata elem.skola; Björn Holmström, Lundsbergs skola; Anders Gustafsson, Motala; Sten Malmquist, Saltsjöbaden; Finn-Erik Weyde, Sigtunaskolan; Sven Axel Blomberg, Solbacka lärov.; i Stockholm: Anna Stina Gjörling, Ahlströmska skolan; Viveka Lundberg, Almquistska samskolan; Bengt Löf, Beskowska skolan; Tore Palmær, Palmgrenska samskolan; Holger Marcus, Whitlockska samskolan; Dagmar Berg, Åhlinska skolan; Erik Wallin, Söderhamn; Bertil Wenblad, Uppsala ensk. lärov. o. privatgymn.

Tekniska läroverk: Arne Schærling, Borås; Waldemar Jansson, Härnösand; Johan Bergman, Malmö; Arne Strömbäck, Norrköping; Torsten Svensson, Örebro.

Högre lärarinneseminariet: Valborg Järner.

Folkskoleseminarier: Anne-Marie Ekert, Falun; Valle Henriksson, Göteborg; Gunnar Bodén, Härnösand; Stig Håkanson, Karlstad; Helga Olofsson, Landskrona; Gustaf Svensson, Linköping: Lars-Erik Isaksson, Luleå; Sixten Hagström, Lund; Zenta Björner, Stockholm; Anna-Greta Rehn, Umeå; Gustaf Ladberg, Uppsala; Birger Johansson, Växiö.

Red.

[1] Det ena ex. bekostat av lärare vid läroverket.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

785) *Lös ekvationssystemet*

$$\left.\begin{aligned} xy &= z^2 + z \\ xz &= y^2 + y \\ yz &= x^2 + x \end{aligned}\right\}.$$

C. H.

786) *Vilken blir koefficienten för den term, som innehåller* x^{n-1}, *när divisionen* $(1-2x)^n : (1-x)^2$ *utföres efter stigande digniteter? (n ett positivt helt tal).* *X.*

787) *Visa, att om* r_1, r_2, r_3 *och* r_4 *äro radier i fyra cirklar, av vilka var och en tangerar de tre övriga, så är under förutsättning att radien räknas negativ för en cirkel, som tangeras innantill av de tre övriga*

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2 = 0.$$

Stig Comét.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

788) Lös ekvationssystemet

$$x+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = y+\frac{1}{x}+\frac{1}{z} = z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 3.$$

Svar: Antingen äro alla tre $=1$ eller två av de obekanta $=\frac{1}{3}$, den tredje $=-3$.

789) Om $b+c^2 = ac+1$, så är produkten av två rötter $=1$ i ekvationen $x^3+ax^2+bx+c=0$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 788—808 äro insända av *C. H.*

790) På en sträcka uppritas åt samma håll, dels en kvadrat, dels en likbent triangel. Bestäm denna triangels toppvinkel, då var och en av de trianglar, som sidorna utskära ur kvadraten, har samma yta som topptriangeln.

Svar: 32°,66.

791) Basen BC i triangeln ABC delas i tre lika delar, och delningspunkterna förenas med A. Visa, att $a^2 = \pm (b^2 - c^2)$, om mellantriangelns inskrivna cirkel är lika stor som en av ytter-trianglarnas.

792) Visa, att $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{b}-\frac{b}{c}\right)$, om a, b och c bilda en aritmetisk serie med differensen 1.

793) Sidan AC i triangeln ABC är diameter i en cirkel, som skär AB i D och BC i E. Visa, att $\triangle BDE = \triangle ABC \,.\, \cos^2 B$.

794) OA och OB äro två mot varandra vinkelräta radier i en cirkel. En med OB parallell linje skär OA i E, cirkeln i F och den genom B dragna tangenten i G. Figuren AEF har lika stor yta som figuren BFG. Beräkna vinkeln AOF.

Svar: 38°,25.

795) I en triangel drages två medianer. Dessa bilda med baserna vinklar, som äro lika med de triangelvinklar, från vars spets de äro dragna. Bestäm förhållandet mellan sidorna.

Svar: $1 : \sqrt{2} : 2$ eller $1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}$.

796) I triangeln ABC är $\sin B . \sin(45° - C) + \sin C . \sin(45° - B) = 0$. Visa, att triangelns yta är lika med kvadraten på höjden mot sidan BC.

797) Den räta vinkelns bissektriskorda i den kring en rätvinklig triangel omskivna cirkeln delas av hypotenusan i förhållandet 3:5. Bestäm triangelns vinklar.

Svar: 18°,43 och 71°,57.

798) Lös ekvationen

$$tgx\,(1 - \sin x)\left(1 - tg\,\frac{x}{2}\right) = 2\cos x\, tg\,\frac{x}{2}.$$

Svar: n. 360°; 216°,88 + n. 360°.

799) I den likbenta triangeln ABC är basen BC konstant. Höjderna BD och CE råkas i O. Bestäm vinkeln A så, att ytan av triangeln BOE blir så stor som möjligt.

Svar: $51°{,}83$.

800) När har höjdernas fotpunktstriangel i en likbent triangel med konstant bas sitt största ytvärde?

Svar: Toppvinkeln $= 45°$.

801) På AB som bas ritas två likbenta trianglar ABC och ABC_1, den förra fast, den senare rörlig. Höjderna AD och AD_1 mot BC och BC_1 dragas. När blir triangeln BDD_1 så stor som möjligt?

Svar: $\sphericalangle C_1 = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle C$.

802) Under vilka vinklar råkas kurvorna $y = x^3 - 2x + 1$ och $y = x^3 - 2x^2 + 1$?

Svar: $90°$ och $63°{,}43$.

803) En cirkel går genom punkten $(0; b)$ på y-axeln och de rörliga punkterna $(x; 0)$ och $(2x; 0)$ på x-axeln. Sök orten för cirkelns medelpunkt.

Svar: Parabeln $8x^2 = 9b\,(2y - b)$.

804) Angiv orten för en punkt, som rör sig så, att summan av dess avstånd till linjerna $bx - ay = 0$ och $bx + ay = ab$ är lika med avståndet från origo till $bx + ay = ab$.

Svar: Delar av linjerna $x = 0$; $y = 0$; $x = a$; $y = b$.

805) Sök längderna av två mot varandra vinkelräta brännpunktsradier till parabeln $y^2 = 4ax$, vilka förhålla sig till varandra som $1 : 2$.

Svar: $5a$ och $10a$.

806) En cirkel med medelpunkten på y-axeln tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ och hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Angiv ordinatan för tangeringspunkterna med hyperbeln.

Svar: $2a$.

807) En cirkel med medelpunkten på y-axeln tangerar hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och skär cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ vinkelrätt. Visa, att cirkeln $x^2 + y^2 = 3a^2$ går genom tangeringspunkterna.

808) En rektangel $ABCD$ är given. På sidan AB som diameter ritas en cirkel. P är en rörlig punkt på cirkeln. Sök orten för mittpunkten av PD.

Svar: En med den givna i skalan 1:2 likställd cirkel.

Lösningar till uppg. 748—750.

748) *På höjden mot sidan BC i den liksidiga triangeln ABC väljes punkten P inom triangeln så, att* $\angle BPC = 80°$. *Sök exakta värdet på det förhållande, i vilket mittpunktsnormalen till AP delar omkretsen av den kring ABC omskrivna cirkeln.* *X.*

Om O är medelpunkten, R mittpunktsnormalens skärningspunkt med cirkeln samt radien $= 1$, så erhålles ur triangeln BOP enligt sinusteoremet $OP : \sin 20° = 1 : \cos 40°$, varav $OP = 1 : 2\cos 20°$. Då $\cos \angle AOR = \frac{1}{2}(1 + OP) = \frac{\cos 60° + \cos 20°}{2\cos 20°} = \cos 40°$, blir $\angle AOR = 40°$ och svaret 2:7. *S. B.*

749) *Vilken blir koefficienten för den term som innehåller* x^n, *när divisionen* $(1 + x)^{2n+1} : (1 - x)$ *utföres efter stigande digniteter? (n ett positivt helt tal.)* *X.*

Koefficienten för x^k i utvecklingen efter stigande potenser av x utav $(1 + x)^{2n+1} : (1 - x)$ heter $\sum_{r=0}^{k} \binom{2n+1}{r}$, där binomialkoefficienten $\binom{2n+1}{r}$ är $= 0$, så snart $r > 2n + 1$. För $k = n$ får man alltså $\sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{r}$, och emedan $\sum_{r=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{r}$ har samma värde, samt $\sum_{r=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{r} = 2^{2n+1}$, blir koefficienten för $x^n = 2^{2n+1} : 2 = 2^{2n}$.

S. Wigert.

750) *En rot till ekvationerna* $x^4 - 22x^2 - 48x = 23$ *är r. Vilka värden har* $r^3 - 3r^2 - 15r - 3$?

Divideras polynomet $(r^3 - 3r^2 - 15r - 3)^2 = r^6 - 6r^5 - 21r^4 + 84r^3 + 243r^2 + 90r + 9$ med $r^4 - 22r^2 - 48r - 23$, blir resten 32. Polynomet kan alltså skrivas $(r^4 - 22r^2 - 48r - 23)\,q(r) + 32$, där $q(r) =$ kvoten. Enligt uppgiften blir därför svaret $\pm\sqrt{32}$.

X.

Även löst av *S. Wigert.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1935.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. I en triangel är en sida 7 cm, omkretsen 15 cm och den mot den förstnämnda sidan stående vinkeln 120°. Hur stora äro sidorna?
2. Sök de reella lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - xy = 12 \\ y^2 - 3xy - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

3. I triangeln ABC är vinkeln A 40°. Bissektrisen till vinkeln B skär sidan AC i D. Ytan av triangeln BCD är dubbelt så stor som ytan av triangeln ABD. Beräkna de obekanta vinklarna i triangeln ABC.
4. I en femhörning äro alla sidorna lika stora. Två närliggande vinklar äro vardera 110°. Beräkna femhörningens övriga vinklar.
5. Från en punkt på en cirkels periferi har man dragit två kordor, den ena 1 dm och den andra 2 dm lång, å ömse sidor om cirkelns medelpunkt. Avståndet från medelpunkten till den förra kordan är 3 gånger så stort som avståndet från medelpunkten till den senare kordan. Beräkna vinkeln mellan kordorna.
6. Å vart och ett av två från början lika stora kapital ha räntorna under 20 år vid varje års slut lagts till kapitalet. De årliga räntorna ha beräknats å det ena kapitalet efter 6 % under de första 10 åren och efter 4 % under de sista 10 åren samt å det andra kapitalet efter 5 % under hela 20-årsperioden. Vilket av de båda kapitalen är störst vid 20-årsperiodens slut?
7. I en triangel är en sida aritmetiskt medium till de båda andra. Visa, att rektangeln av de båda sistnämnda sidorna är sex gånger så stor som rektangeln av in- och omskrivna cirklarnas radier.
8. $ABCD$ är en kvadrat med sidan 2 dm. Genom mittpunkterna av sidorna AD och CD drages en rät linje, som skär förlängningarna av sidorna BA och BC i E och F resp. Beräkna längden av den cirkelbåge, som går genom punkterna E, D och F.

Resultat: **1.** 3, 5 och 7 cm. **2.** x och y resp. $+\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$ eller $-\sqrt{6}$ och $+\sqrt{6}$. **3.** 18°,75 och 121°,25. **4.** 102°,65; 102°,65; 114°,70 (eller 37°,35; 37°,35; 245°,30). **5.** 78°,47. **6.** Det andra. Slutkapitalen resp. $k.$ 2,651 och $k.$ 2,653 (k = ursprungliga kapitalen). **8.** 4,550 dm.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

a) *1933 års undervisningsplan.*

1. I triangeln ABC är sidan $AC = 19{,}3$ cm, sidan $BC = 8{,}6$ cm och vinkeln $B = 52°{,}17$. Sidan CA förlänges till en punkt D utanför A, så att $AD = {}^1/_2\, AB$. Beräkna vinklarna i triangeln ABD.
2. Beräkna värdet av 7^x, där $x = \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$ samt a och b rötterna till ekvationen $7t^2 + 7t + 1 = 0$.
3. Bestäm koordinaterna för en av de punkter på den räta linjen $x - 2y = 0$, vars avstånd till den räta linjen $3x + 4y + 5 = 0$ är lika stort som dess avstånd till punkten $(8; -1)$.
4. Skillnaden mellan den största och den minsta sidan i en triangel är hälften så stor som radien i den i triangeln inskrivna cirkeln. Den tredje sidan är aritmetiska mediet till de båda andra sidorna. Beräkna den största vinkeln.
5. I ett klot göres en utborrning, vars gränsyta är mantelytan till en kon med toppen i klotets medelpunkt och toppvinkeln = 80°. Sedan fortsättes utborrningen, tills gränsytan blir mantelyta i en kon med samma bascirkel och samma axel som den första men med toppen mitt emellan klotets medelpunkt och yta. Beräkna förhållandet mellan volymerna av de delar, som borttagas andra och första gången.
6. I ett halvklot skall ett regelbundet prisma med kvadratisk basyta inskrivas, så att en rektangulär sidoyta ligger i halvklotets plana yta och de fyra återstående hörnen i klotytan. Bestäm maximivärdet för prismats volym, om klotets radie är r.
7. I en cirkel med radien 5 cm är inskriven en sexhörning $ABCDEF$, i vilken sidorna AB, CD och EF äro lika långa och var och en dem dubbelt så lång som var och en av de övriga sidorna. Beräkna sexhörningens yta.
8. Ett lån, på vilket 5 % årlig ränta på ränta beräknas, skall amorteras på 40 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Varje inbetalning utgör till en del ränta, till en del kapitalavbetalning å skulden. Vid vilken inbetalning inträffar det

för första gången, att räntan blir mindre än kapitalavbetalningen?

9. I ett rätvinkligt koordinatsystem är O origo, A en punkt på x-axeln och B en punkt på y-axeln. En rät linje genom A träffar OB i en punkt C mellan O och B så, att $OC : CB = 2 : 3$. En rät linje genom B träffar OA i en punkt D mellan O och A så, att $OD : DA = 3 : 2$. Linjerna AC och BD skära varandra i E. Från O är en linje dragen genom E; den träffar AB i F. Bestäm förhållandet $AF : FB$.

(Uppgiften kan lösas antingen med analytisk eller med Euklideisk geometri.)

Resultat: **1.** 6°,83; 13°,77; 159°,40. **2.** 77,6. **3.** (4; 2) och (64; 32). **4.** 67°,38. **5.** $\frac{1+\cos 40^\circ}{4} = 0{,}4415$. **6.** $\frac{16r^3 \cdot \sqrt{3}}{45}$. **7.** $\frac{975\sqrt{3}}{28} = 60{,}31$ cm². **8.** Vid 27:e inbetalningen.[1] **9.** 4 : 9.

b) *1928 års undervisningsplan.*

Uppgifterna 1, 2, 4—7 utgjordes av motsvarande uppgifter a).

3. Bestäm maxima och minima för funktionen

$$y = \cot x + 3 \operatorname{tg} x$$

och angiv mellan vilka gränser de värden ligga, som funktionen icke kan antaga.

8. En parabel är given; dess brännpunkt är F. Tangenterna i parameterns ändpunkter äro dragna. En godtycklig tredje tangent till parabeln skär de båda andra i punkterna P_1 och P_2. Visa, att linjerna FP_1 och FP_2 äro vinkelräta mot varandra.

9. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro punkterna A (0; 1) och B (0; — 5) givna. På AB uppritas parallelltrapets $ABCD$, i vilka de tre sidorna BC, CD och DA äro lika långa. Sök orten för hörnpunkten C.

Resultat: **3.** $y_{\max} = -2\sqrt{3}$ för $x = 150^\circ + n \cdot 180^\circ$; $y_{\min} = 2\sqrt{3}$ för $x = 30^\circ + n \cdot 180^\circ$. Inga värden mellan $-2\sqrt{3}$ och $+2\sqrt{3}$. **9.** Den undre grenen av hyperbeln $\frac{x^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{4} = -1$. Dessutom cirkeln $x^2 + (y+5)^2 = 36$, om *romber* få betraktas som parallelltrapets.

Uppgifter i fysik.

1. På ett gevär kan siktet förskjutas längs en mot pipan vinkelrät ram, så att siktskåran alltjämt befinner sig i samma genom kor-

[1] Se detta häfte sid. 233.

net och loppets axel gående plan. Avståndet mellan kornet och ramen är 1 m. Om siktet inställes 10 mm ovanför det läge, som motsvarar en med loppets axel parallell siktlinje genom kornet, skjuter geväret rätt mot ett mål, som befinner sig på 1 000 meters avstånd från gevärsmynningen och i samma horisontalplan som denna. Med vilken hastighet lämna projektilerna geväret? Från luftmotståndets inverkan bortses. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek².

2. I en fast punkt, belägen 40 cm över ett glatt vågrätt plan, är ena ändan av ett viktlöst snöre fästad. Vid den andra är fastsatt en liten kula, som väger 20 g. Kulan sättes i rörelse, så att den med konstant hastighet beskriver en cirkel på planet, under det att snöret är spänt. Omloppstiden är därvid 2,0 sek. Hur stor är normalkraften från kulan mot planet? Accelerationen vid fritt fall är 981 cm/sek².
3. I ett rum, som är 4 m brett, 5 m långt och 3 m högt, är relativa fuktigheten 30 %. Hur mycket vatten skall man låta avdunsta i rummet, för att relativa fuktigheten skall stiga till 70 %? Temperaturen i rummet är 17° C. Vid denne temperatur är vattenångans mättningstryck 14,5 mm Hg. Vattenångans specifika vikt i förhållande till luft av samma tryck och temperatur är $^5/_8$. Vid 0° C och 760 mm Hg väger 1 liter luft 1,293 g. Luftens temperaturkoefficient är $^1/_{273}$.
4. I en teaterkikare är diametern hos den fria delen av objektivet (= objektivinfattningen) 5 cm. När kikaren är inställd för parallella strålar, är förstoringen 3. Hur stor är då diametern i den bild, som okularet alstrar av objektivinfattningen?
5. I ett kanalstråleröre utgår genom en öppning i katoden och vinkelrätt mot densamma ett strålknippe, som består av självlysande partiklar. Ett spektroskop placeras så, att kollimatorns optiska axel blir vinkelrät mot strålknippets rörelseriktning. I spektroskopet observerar man då en spektrallinje, vars våglängd är 0,0006563 mm. Då spektroskopet därefter placeras så, att kollimatorns optiska axel kommer i strålknippets förlängning och partiklarna således röra sig mot kollimatorspalten, förskjutes den förutnämnda spektrallinjen mot violetta delen av spektrum, och dess våglängd blir 0,0006548 mm. Beräkna kanalstrålepartiklarnas hastighet, då ljusets hastighet är $3 \cdot 10^{10}$ cm/sek.
6. Mellan plusledningen och nollan i ett likströmsnät med 220 volts spänningsskillnad har man i serie infört ett motstånd på 57 ohm och ett ackumulatorbatteri bestående av 30 stycken lika, seriekopplade celler. Varje cell har en elektromotorisk kraft

på 2 volt och ett inre motstånd på 0,1 ohm. Batteriets positiva pol är förenad med plusledningen. Beräkna spänningsskillnaden mellan polerna hos en av cellerna.

7. Två lika stora motstånd *A* och *B* äro kopplade i serie mellan polerna av ett elektriskt batteri, vars elektromotoriska kraft är konstant och inre motstånd så litet, att det kan lämnas utan avseende. Parallellt med *A* kopplas ett motstånd *C* av sådan storlek, att effekten i *A* minskas till $^1/_4$ av sitt förra värde. I vilket förhållande ändras härigenom effekten i motståndet *B*? Motstånden antagas vara oberoende av temperaturen.
8. En inklinationsnål bildade 73°,3 vinkel med horisontalplanet. Nålens svängningsplan sammanföll därvid ej med magnetiska meridianplanet. Sedan inklinatoriet vridits kring en vertikal axel 90° från det förra läget, bildade inklinationsnålen 78°,3 vinkel med horisontalplanet. Beräkna inklinationen.

Resultat: **1.** 700 m/sek. **2.** 12,0 gf. **3.** 348,4 g. **4.** $1\frac{2}{3}$ cm. **5.** $6{,}86 \cdot 10^7$ cm/sek. **6.** $2\frac{4}{15}$ V. **7.** 9 : 4. **8.** 70°,0.

Realexamen H. T. 1935.

Provräkning.

1. Lös ekvationen:

$$\frac{x - \frac{1{,}5}{4}}{x + \frac{3}{8}} - \frac{2x + \frac{3}{4}}{8x - 3} = \frac{3}{4}.$$

2. En växel, som lydde på 400 kr., utställdes den 24 februari på tre månader. Växeln diskonterades i en bank den 12 mars efter 4 %. Huru mycket betalade banken för växeln?
3. En handlande köpte ett parti frukt och fick 5 % rabatt. Kort därefter måste han sälja partiet med 20 % förlust på det pris, han själv betalat, varvid han erhöll 60 kr. 80 öre. Huru mycket skulle vid hans inköp av frukten denna ha kostat utan rabatt?
4. Snälltåg n:r 2 avgår nu från Malmö kl. 21^{50} (50 minuter över kl. 9 e. m.) och ankommer till Stockholm följande morgon kl. 6^{27} efter att ha gjort uppehåll på sammanlagt 49 min. Före elektrifieringen avgick motsvarande tåg (n:r 12) från M. kl. 22^{10} och anlände till S. kl. 8^{50} efter uppehåll på 61 min. Huru mycket har medelhastigheten under gång ökats i samband med elektrifieringen, då avståndet från M. till S. är 599 km?

5. En person kan köpa 4 % obligationer på nominellt 500 kr. till 96 % kurs. Det härför erforderliga beloppet uttager han av sina i bank insatta medel, varå han har 3 % ränta. Huru många obligationer skall han köpa, för att hans årliga ränteinkomst efter köpet av obligationerna skall bliva 140 kr. större än förut?
6. Förenas två motstående hörn i en rektangel, blir den så uppkomna diagonalen 16,2 cm. Fällas normaler från de båda övriga hörnen mot diagonalen, delas denna i tre lika stora delar. Beräkna rektangelns sidor.
7. Huru många blykulor med 1 mm:s radie kunna tillverkas av en blycylinder, vars höjd är 5 cm, och vars cirkulära basyta har en radie av 2 cm?
8. En rätvinklig lår har längden 1 m 4 dm. Om man minskar bredden med 1 dm samt ökar höjden med 1 dm 6 cm, blir volymen oförändrad. Ökar man däremot bredden med 8 cm och minskar höjden med 5 cm, blir volymen 42 dm³ större. Beräkna lårens bredd och höjd.

Retultat: 1. $x = \frac{9}{40}$. 2. 396,80 kr. 3. 80 kr. 4. 14,7 km/tim. 5. 25 st. 6. $5{,}4\sqrt{3} = 9{,}4$ cm och $5{,}4\sqrt{6} = 13{,}2$ cm. 7. 15 000 st. 8. Bredden är 6 dm och höjden 8 dm.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

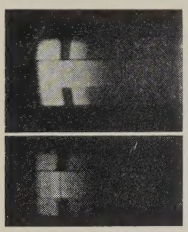
1. En jämntjock, homogen trästav är 104,0 cm lång. Vid dess ena ända fästes en 100-gramsvikt, hängande i en fin tråd. Om staven understödes med en egg 200 mm från denna ända, väger den jämnt. Hur tung är staven?
2. En kropp väger 63,45 g i lufttomt rum och 38,07 g, då den är fullständigt nedsänkt i vatten. Beräkna kroppens specifika vikt.
3. Motståndet hos en kopparlindning i ett induktorium befinnes vara 3,2 ohm och trådens diameter är 2 mm. Beräkna längden av lindningstråden. Specifika ledningsmotståndet för koppar är 0,017. $\pi = 3{,}14$.
4. Ett upphettat järnstycke, vägande 6 hg, nedfördes i 200 cm³ terpentin av 15° temperatur. Blandningstemperaturen blev 50°. Vilken temperatur hade järnstycket, då det nedfördes i terpentinen? Terpentins specifika vikt är 0,87 och dess specifika värme 0,44. Järnets specifika värme är 0,11.
5. En båglampa om 800 normalljus kräver en polspänning av 45 volt och en ström av 6 ampère. Vad kostar belysningen med denna lampa per timme och normalljus efter ett energipris av 35 öre per kWh?

6. En voltmeter A har motståndet 2 000 ohm och en annan B 1 000 ohm. Man inkopplar i en strömbana voltmetern A parallellt med motståndet R och inför därefter voltmetern B i den ogrenade delen av ledningen. A visar då 12 volt och B 11 volt. Beräkna motståndet R.
7. En skruv har en gänghöjd på 5 mm. Kraftarmen är 4 dm. Hur stor är skruvens verkningsgrad, om en kraft på 10 kg lyfter en last på 2 400 kg?
8. En bil väger 1 ton och går med en hastighet av 54 km/tim. De i bilen åkande personerna väga tillsammans 199 kg. Hur stor kraft erfordras för att få bilen att stanna på en sträcka av 10 m, sedan motorn frikopplats? Accelerationen vid fritt fall är 9,81 m/sek^2.

Resultat: **1.** 62,5 g. **2.** 2,50. **3.** 591 m. **4.** 90°,6. **5.** 0,012 öre. **6.** 2 400 ohm. **7.** 48 %. **8.** 1 375 kgf.

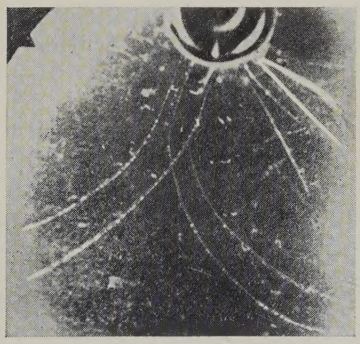
Rättelser.

1. G. Forsström, *Ett par enkla ljusabsorptionsförsök* etc., 1935, sid. 36–38.



Då figuren å sid. 37 i sluttrycket råkat bli felvänd och därtill mycket otydlig, meddelas här två positiva kopior från samma negativ som förut. I den övre äro de båda absorptionsbanden skarpt markerade, i den undre framträder den omvända, fina natriumlinjen, ehuru på bekostnad av den ljusa skiljegränsen mellan de två absorptionsbanden (kraftigare kopia).

2. O. Lundquist, *Om inducerad radioaktivitet*, 1935, sid. 95—109.



I figuren på sid. 102 framträda ej partikelbanorna med tillräcklig tydlighet. Figuren återges här i nytryck efter ny kliché.

3. J. Tandberg, *Vad är 1 kg?*, 1935 sid. 33, rad 11 nedifrån; står: i år, bör vara: 1934.